

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

7.-9.

klasei

**Mācību satura
un valodas apguve**

VIA2

**Elfrīda Kokoriša
Jekaterina Semenkova-
Lauce**

matemātikā

**Mācību līdzeklis
skolēnam**



Projekts «Atbalsts valsts valodas apguvei un bilingvālajai izglītībai»

Nr. 2008/0003/1DP/1.2.1.2.1/08/IPIA/VIAA/002

UDK 811.174:51(075.2)

Ko 176

Elfrīda Kokoriša, Jekaterina Semenkova-Lauce
MĀCĪBU SATURA UN VALODAS APGUVE
MATEMĀTIKĀ SKOLĒNIEM 7. – 9. KLASĒ

Mācību līdzeklis skolēnam

Projekta vadītāja: *Anita Šaltāne*

Redaktore: *xxx*

Mākslinieciskais redaktors: *Edgars Švanks*

Tehniskā redaktore: *Inta Veinšteina*

Korektore: *Diāna Spertāle*

Recenzentes: *xxx*

Projektu līdzfinansē Eiropas Savienība

Iespiests tipogrāfijā

© 2011, LVA

ISBN 978-9934-815-31-2

Satura rādītājs

Ievads	5
1. Darbības ar racionāliem skaitļiem	6
2. Pirmskaitļi un saliktie skaitļi. Skaitļu dalāmība	11
3. Daļas un procenti. Proporcijas	14
4. Pakāpes, to īpašības. Pakāpes ar negatīvu kāpinātāju	16
5. Izteiksmes ar mainīgajiem. Monomi. Polinomi. Saīsinātās reizināšanas formulas	22
6. Lineārs vienādojums. Lineāro vienādojumu sistēma	29
7. Koordinātu plakne. Funkcija un ar to saistītie jēdzieni	36
8. Lineārā nevienādība. Lineāro nevienādību sistēma	43
9. Tiešā proporcionalitāte. Lineārā funkcija.	50
10. Ievads ģeometrijā. Leņķis, tā veidi, bisektrise. Attālums	56
11. Ar taisņu savstarpējo novietojumu saistītie leņķi	61
12. Trijstūru veidi. Trijstūra elementi. Trijstūra vienādības pazīmes	65
13. Kvadrātsakne, tās īpašības	73
14. Algebriskās daļas, darbības ar tām	83
15. Apgrieztā proporcionalitāte. Ievads nelineāro sistēmu risināšanā	89
16. Daudzstūris. Četrstūri, to īpašības	95
17. Trapece	102
18. Kvadrātvienādojums. Vjeta teorēma	106
19. Kvadrātfunkcija. Grafiku pārveidojumi	114
20. Kvadrātnevienādība. Intervālu metode	120
21. Riņķa līnija un riņķis, tā elementi. Centra leņķis un ievilkts leņķis	127
22. Taisnleņķa trijstūris. Trigonometriskās funkcijas. Pitagora teorēma	132

23. Trijstūra laukums	137
24. Četrstūra laukums	143
25. Skaitļu virknes jēdziens. Aritmētiskā un ģeometriskā progresija	148
26. Kombinatorika, statistika un varbūtība.	153

Pievērs uzmanību apzīmējumiem!



Likums vai definīcija, kura jāiemācās.



Svarīga jauna informācija



Atgādinājums par iepriekš mācīto

☒ – piemēra vai atrisinātā uzdevuma apzīmējums:

☒ – piemēru uzskaitījums

➔ – vispārīgs darbības apraksts

→ – norāde uz darbību dotajā piemērā

② – norāde uz izmantoto formulu

☐ – uzdevuma apzīmējums

◆ – uzdevumi pašpārbaudei

Ievads

Mācību līdzeklis bilingvālajā izglītībā „Mācību satura un valodas apguve matemātikā 7. – 9. klasē” ir palīgs skolēniem svarīgāko matemātikas pamatzglītības standarta tematu apgūšanā. Autores piedāvā mācību līdzekli izmantot kā papildmateriālu pamatskolas skolēniem patstāvīgam darbam, kā arī gatavojoties tematiskajiem pārbaudes darbiem vai 9. klases noslēguma eksāmenam matemātikā.

Mācību līdzekļa priekšrocība ir vienkārša valoda, īss, shematisks teorētiskā materiāla izklāsts, uzdevumu atrisinājumu paraugi ar skaidrojumiem un daudzveidīgi uzdevumi patstāvīgai risināšanai. Katra temata noslēgumā skolēns var pārbaudīt savas zināšanas, izpildot pašpārbaudes uzdevumus. Lai skolēns pārliecinātos par atrisinājumu pareizību, mācību līdzekļa beigās ir atbildes.

Autores iesaka ar katru piedāvāto tematu strādāt secīgi: vispirms iepazīties ar teorētisko materiālu, izpētīt un izprast atrisinātos uzdevumu piemērus, pēc tam piemērus atrisināt patstāvīgi un risinājumu salīdzināt ar paraugā doto.

Lai nostiprinātu uzdevumu risināšanas prasmes, skolēnam jāatrisina katrā tematā dotie uzdevumi un jāveic pašpārbaude. Pēc autoru domām, tas dod iespēju skolēnam iegūt adekvātu pašvērtējumu par savām prasmēm un neskaidrajiem jautājumiem. Tas motivēs tālākā sadarbībā ar skolotāju uzlabot savus mācību sasniegumus.

Punktu skaits	0 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 16	17 – 20
Pašsajūta pēc pašpārbaudes					

Mācību līdzeklis ir izveidots pēc iespējas draudzīgs skolēnam, izmantojot „vizuālos ceļvežus” – vienotus apzīmējumus, kuri vada skolēnu no vienas secīgas darbības uz nākamo.

1. Darbības ar racionāliem skaitļiem

Skaitļu kopas



Kopa ir dažādu objektu apvienojums, kuriem piemīt noteikta pazīme. Šie objekti ir **kopas elementi**.

Kopa	Kopas elementi
klase	skolēni
alfabēts	burti
vārdnīca	vārdi

Kopas apzīmē ar lielajiem latīņu alfabēta burtiem.

Ja kopā ir noteikts elementu skaits, tad kopa ir **galīga**. To pieraksta, uzskaitot visus kopas elementus figūriekavās $\{ \}$.

- ☒ Ja ar A apzīmē visu iespējamo atzīmju kopu, tad to pieraksta šādi:
 $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.
- ☒ Vārda „sakne” burtu kopa ir $\{s; a; k; n; e\}$. Burti s, a, k, n, e ir dotās kopas elementi.



$a \in B$ – elements a pieder kopai B
 $c \notin B$ – elements c nepieder kopai B

1. Ir dota kopa B , kuras elementi ir skaitļi 1; 2; 3; 4; 5. Pasvītro pareizo apgalvojumu!

- a) $2 \in B$ b) $5 \notin B$ c) $10 \in B$ d) $6 \notin B$



Ja kopā nav neviena elementa, tā ir **tukša**.
Tukšu kopu apzīmē ar $\emptyset$.

Matemātikā ir vairākas bezgalīgas skaitļu kopas.

		Naturālie skaitļi N rodas skaitīšanas procesā. Nulle nav naturāls skaitlis. $N = \{1; 2; 3; \dots\}$	
Vesēlie negatīvie skaitļi Z_- $Z_- = \{\dots -3; -2; -1\}$	0	Vesēlie pozitīvie skaitļi Z_+ $Z_+ = \{1; 2; 3; \dots\}$	Daļskaitļi Parastas daļas un decimāldaļas $\frac{2}{5}; -2\frac{3}{4}; -1,16\dots$
Vesēlie skaitļi Z ir naturālie skaitļi, negatīvie skaitļi un nulle. $Z = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$			
Racionālie skaitļi Q – tie, kurus var pierakstīt daļas veidā $\frac{m}{n}$, kur m ir vesels skaitlis ($m \in Z$), n ir naturāls skaitlis ($n \in N$). $\left\{ \frac{2}{3}; -4\frac{1}{3}; 0,3; 5; 0 \right\} \in Q$, jo $-4\frac{1}{3} = -\frac{13}{3}; 0,3 = \frac{3}{10}; 5 = \frac{5}{1}; 0 = \frac{0}{6}$.			

Lai izteiktu parasto daļu $\frac{a}{b}$ kā decimāldaļu, tās skaitītājs a ir jādala ar saucēju b .

$$\checkmark \frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5 \quad \checkmark \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75 \quad \checkmark \frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,333333\dots$$



Skaitļus dalot, iegūst **galīgu decimāldaļu** (piemēram, 0,5; 0,75) vai **bezgalīgu decimāldaļu** (0,333...).

Galīgai decimāldaļai aiz komata ir noteikts ciparu skaits, bet bezgalīgai – bezgalīgi daudz ciparu.

$\frac{a}{b}$ ← **skaitītājs**
 $\frac{a}{b}$ ← **parastā daļa**
 $\frac{a}{b}$ ← **saucējs**

Decimāldaļas periods ir cipars vai ciparu grupa, kas bezgalīgi atkārtojas decimāldaļai aiz komata. To pieraksta iekavās.



$$\checkmark \frac{2}{9} = 0,22222\dots = 0,(2)$$

→ Lasa šādi: „Nulle komats divi periodā”

$$\checkmark 1\frac{2}{11} = 1,1818\dots = 1,(18)$$

→ Lasa šādi: „Viens komats astoņpadsmit periodā”

$$7,0000\dots : 12 = 0,5833\dots = 0,58(3)$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 70 \\ 60 \\ \hline 100 \\ 96 \\ \hline 40 \\ 36 \\ \hline 40 \\ 36 \end{array}$$



2. Uzraksti parastās daļas kā decimāldaļas ar periodu!

$$a) \frac{1}{6} \quad b) -\frac{1}{4} \quad c) \frac{3}{15} \quad d) \frac{3}{8} \quad e) \frac{3}{13} \quad f) -1\frac{3}{40} \quad g) -\frac{22}{9}$$

3. Pārbaudi, vai dotās nevienādības ir patiesas! Pareizās nevienādības pasvītiro!

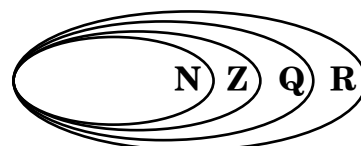
$$a) \frac{2}{9} = 0,(2) \quad b) 0,7 = 0,(7) \quad c) 0,1(6) < 0,(16) \quad d) \frac{3}{5} > 0,(6) \quad e) 0,(4) > 0,(43)$$

4. Doti skaitļi 0; 0,25; -5; $2\frac{3}{4}$; 2,1111...; 26; $-\frac{22}{9}$; 3,(23); 1240; $\frac{13}{3}$; 211; $\frac{28}{7}$; 7,01.

No šiem skaitļiem izraksti

- racionālos skaitļus;
- veselos skaitļus;
- nepāra skaitļus;
- pāra skaitļus;
- naturālos skaitļus.

Skaitļu kopu paplašināšana





Matemātisko darbību īpašības Saskaitīšanas īpašības:

① $a + b = b + a$

② $(a + b) + c = a + (b + c)$

Reizināšanas īpašības:

③ $a \cdot b = b \cdot a$

④ $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$

⑤ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

⑥ $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$

Ir decimāldaļas, kurām nevar noteikt periodu, šādi skaitļi ir **iracionālie skaitļi**. Iracionālos skaitļus nevar pierakstīt kā parasto daļu. Iracionālo skaitļu kopu apzīmē ar **I**.

☑ $\pi = 3,141592\dots$

☑ $e = 2,718281\dots$



Divi racionālie skaitļi ir **savstarpēji apgriezti**, ja to reizinājums ir vienāds ar 1.

Skaitļi $\frac{1}{2}$ un 2 ir savstarpēji apgriezti skaitļi,

jo $\frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 1$.

Matemātisko darbību īpašības

② $\left(1\frac{3}{17} + 2\frac{11}{72}\right) + 5\frac{14}{17} = 2\frac{11}{72} + \left(1\frac{3}{17} + 5\frac{14}{17}\right) = 2\frac{11}{72} + 7 = 9\frac{11}{72}$

④ $50 \cdot 1,34 \cdot 0,2 = 1,34 \cdot (50 \cdot 0,2) = 1,34 \cdot 10 = 13,4$

⑤ $6\frac{3}{7} \cdot 7 = \left(6 + \frac{3}{7}\right) \cdot 7 = 6 \cdot 7 + \frac{3}{7} \cdot 7 = 42 + \frac{3 \cdot 7}{7} = 42 + 3 = 45$

5. Rēķini! Izmanto darbību īpašības!

a) $3,27 + 3,5 + 4,73 + 5,5$ b) $4 \cdot 28 \cdot 25 \cdot 0,5$

c) $1,25 \cdot 0,01 - 0,01 \cdot 3,25$ d) $4\frac{1}{2} \cdot 2,3 + 4\frac{1}{2} \cdot 7,7$

Darbības ar negatīviem skaitļiem

Sakarības darbībām ar negatīviem skaitļiem:

$-(-a) = +a$ $-(+a) = -a$

$+(-a) = -a$ $+(+a) = +a$

$(-) \cdot (-) \rightarrow (+)$ $(-) \cdot (+) \rightarrow (-)$

$(+) \cdot (-) \rightarrow (-)$ $(+) \cdot (+) \rightarrow (+)$

Risinot izteiksmes ar negatīviem skaitļiem, pievērs uzmanību rezultāta zīmes noteikšanai (skat. 1. att.).

☑ $6 - (-5) = 6 + 5 = 11$

☑ $-4 - (+3) = -4 - 3 = -7$

☑ $(-0,6) \cdot (+5) = -3$

6. Rēķini! Katra iegūtā atbilde ir kādas izteiksmes loceklis!

$$\begin{array}{lllll}
 10\frac{3}{10} + \frac{1}{5} = 10\frac{1}{2} & -16,5 \cdot 100 = & 51 : 9 = & -2 - 2\frac{2}{3} = & 2 : 2\frac{2}{11} = \\
 23 : (-0,23) & -\frac{11}{100} + 2\frac{3}{20} = & 10\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = & -4 + \frac{2}{5} = & -1650 + 1649\frac{3}{4} = \\
 1,2 + 0,08 = & 5\frac{2}{3} \cdot -\frac{6}{17} = & -100 \cdot \frac{8}{25} = & 1,28 \cdot 1,5 = & 4\frac{3}{5} \cdot (-5) = \\
 -0,25 \cdot 0,44 = & -3\frac{3}{5} : (-3) = & -32 \cdot 0,125 = & \frac{11}{12} \cdot (-18) = & 2\frac{1}{25} \cdot 25 =
 \end{array}$$

Kāpināšana

Kāpināt skaitli a pakāpē b nozīmē reizināt a skaitli b reizes pašu ar sevi. To pieraksta šādi: $a^b = c$ $\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{b \text{ reizes}} = c$



$$\checkmark 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$\checkmark \left(1\frac{1}{3}\right)^3 = 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$$

$$\checkmark (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$\checkmark -2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$$

7. Aprēķini izteiksmes vērtību! Ievēro darbību secību!

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \frac{0,6 \cdot 5^2 - 15}{3,56 + 1,2^2} & \text{b) } \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) & \text{c) } \frac{\left(3,6 - \frac{3}{4}\right) \cdot 0,6}{\left(\frac{3}{8} + 1,25\right) \cdot 4 + 2,5} \\
 \text{d) } (-1)^{100} - 1^{81} + 0^{85} - (-1)^{99} & &
 \end{array}$$

8. Izlabo kļūdas! Atrisini!

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{6}{8}$$

$$\text{b) } 3,5 \cdot 7 = 245$$

$$\text{c) } 2\frac{2}{5} : 2 = 2\frac{2}{4}$$

$$\text{d) } 3,5 \cdot 10 = 350$$

$$\text{e) } (-2)^3 = -6$$

$$\text{f) } 3,5 \cdot 100 = 3500,0$$

$$\text{g) } 20 : 0,1 = 2$$

$$\text{h) } 8\frac{2}{5} : 2 = 4\frac{2}{5}$$

$$\text{i) } \frac{2}{7} \cdot 2 = \frac{2}{14}$$

$$\text{j) } -1 + 4\frac{1}{6} = 3\frac{3}{6}$$

Skaitļa modulis



Skaitļa **modulis** ir attālums starp koordinātu sākumpunktu un punktu, kas atbilst dotajam skaitlim.

$$\checkmark \quad |-5| = 5 \quad \checkmark \quad \left| -2\frac{2}{5} \right| = 2\frac{2}{5} \quad \checkmark \quad |0| = 0$$

9. Nosaki nezināmo skaitli:

$$\text{a) } |x| = 2 \quad \text{b) } |x| = -1 \quad \text{c) } |x + 1| = 0 \quad \text{d) } |x - 2| = 4$$



Skaitļi, kuri atrodas vienādā attālumā no nulles, bet atšķiras ar zīmēm, ir **savstarpēji pretēji skaitļi**.

$$\checkmark \quad 5 \text{ un } -5 \text{ ir savstarpēji pretēji skaitļi}$$

$$\checkmark \quad 3\frac{1}{3} \text{ un } -3\frac{1}{3} \text{ ir savstarpēji pretēji skaitļi}$$

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Vai 1,2 ir vesels skaitlis?
- (1 p.) 2. Nosauc vismazāko naturālo skaitli!
- (1 p.) 3. Kā sauc skaitļus 9 un -9 ?
- (1 p.) 4. Aprēķini 1^{100} vērtību!
- (2 p.) 5. Vai ir pareiza vienādība $2 : \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$? Ja nē, tad aprēķini izteiksmes vērtību!
- (2 p.) 6. Vai skaitļa $2\frac{3}{5}$ apgrieztais skaitlis ir $2\frac{5}{3}$?
- (3 p.) 7. Atrisini un noskaidro, vai vienādība $(0,5)^2 + 1\frac{1}{4} = 1,5$ ir patiesa!
- (3 p.) 8. Pārveido daļu $\frac{4}{33}$ kā decimāldaļu ar periodu!
- (3 p.) 9. Uzraksti nezināmā skaitļa x vērtības, ja $|x| = 4$!
- (3 p.) 10. Aprēķini izteiksmes $\left(8 \cdot 0,5 - 2,7 \cdot \frac{1}{3} \right) : 3\frac{1}{10}$ vērtību!

2. Pirmskaitļi un saliktie skaitļi. Skaitļu dalāmība

Skaitļa dalītāji un dalāmie. Pirmskaitļi un salikti skaitļi

Skaitļa **dalītāji** ir skaitļi, **ar kuriem** dotais skaitlis **dalās** bez atlikuma.



- ☒ Skaitlis 12 bez atlikuma dalās ar 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Tātad 1, 2, 3, 4, 6, 12 ir skaitļa 12 dalītāji.

Skaitļa **dalāmie** ir skaitļi, **kuri dalās** ar doto skaitli bez atlikuma.



- ☒ Skaitļi 4, 8, 12, 16 dalās ar 4.
Tātad 4, 8, 12, 16... ir skaitļa 4 dalāmie.

1. Uzraksti visus dalītājus skaitļiem 2; 6; 12; 24; 63; 72!

2. Uzraksti trīs dalāmos skaitļiem 2; 3; 5; 10; 12; 24!

Pirmskaitļi ir naturālie skaitļi, kas dalās tikai ar 1 un **paši ar sevi**.
Skaitlis 1 nav pirmskaitlis.



- ☒ 2; 3; 5; 7; 11; 13; ...ir pirmskaitļi.

Saliktie skaitļi ir naturālie skaitļi, kas dalās ne tikai ar 1 un sevi pašu, bet arī ar citiem skaitļiem.



- ☒ Skaitļi 4; 6; 8; 9; 10; ... ir saliktie skaitļi.

Skaitļa dalāmības pazīmes

Dalāmības pazīmi nosaka pēc skaitļa pēdējā cipara			Dalāmības pazīmi nosaka pēc skaitļa ciparu summas	
Ar 2 dalās skaitļi, kuru pēdējais cipars dalās ar 2.	Ar 5 dalās skaitļi, kuru pēdējais cipars dalās ar 5.	Ar 10 dalās skaitļi, kuru pēdējais cipars ir 0.	Ar 3 dalās skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 3.	Ar 9 dalās skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 9.
☒ 2, 38, 340 dalās ar 2	☒ 15, 235, 120 dalās ar 5	☒ 70, 100, 260 dalās ar 10	☒ 51 dalās ar 3, jo $5 + 1 = 6$ un 6 dalās ar 3	☒ 63 dalās ar 9, jo $6 + 3 = 9$ un 9 dalās ar 9

3. Zvaigznītes * vietā ieraksti ciparu, lai iegūtu patiesu apgalvojumu!
Norādi visus iespējamus variantus!
- a) 3^* dalās ar 2 c) 24^* dalās ar 5 e) $*2^*$ dalās ar 3 un 25
b) $*29$ dalās ar 3 d) $4*5$ dalās ar 9
4. Uzraksti visus trīsciparu skaitļus, kuru pierakstā ir tikai cipari 0, 2 un 5, un kuri
- a) dalās ar 2 b) dalās ar 5

Skaitļu lielākais kopīgais dalītājs un mazākais kopīgais dalāmais



Jebkuru saliktu skaitli var uzrakstīt kā pirmskaitļu reizinājumu, t. i., **sadalīt pirmreizinātājos**.

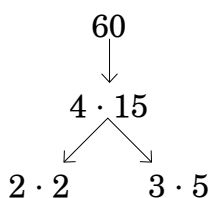
☒ $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7$

Salikto skaitli sadala pirmskaitļu reizinājumā šādi:

- pārbauda, vai skaitlis dalās ar vismazāko pirmskaitli 2, izdala ar to un pieraksta rezultātu;
→ pārbauda, vai dalījums vēlreiz dalās ar 2, ja nedalās – tad dala ar nākamo pirmskaitli, t. i., 3, tad 5 utt., kamēr rezultātā iegūst 1.



Sadalīt skaitli 60 pirmreizinātājos var arī tā:



Skaitli 60 sadala pirmreizinātājos šādi:

Dalīšanas rezultāts	Pirmskaitlis, ar kuru dala
60 – dots skaitlis	2
30	2
15	3
5	5
1	

Tātad $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

5. Sadali pirmreizinātājos skaitļus!

- a) 16 b) 24 c) 80 d) 120 e) 180 f) 210



Divu vai vairāku skaitļu **lielākais kopīgais dalītājs** ir lielākais skaitlis, ar kuru dalās dotie skaitļi. To apzīmē ar **L**.

- ☒ Lai noteiktu L (12, 30), noskaidro skaitļu 12 un 30 visus dalītājus.
12 dalās ar **1, 2, 3, 4, 6**, bet 30 dalās ar **1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30**.

Abu šo skaitļu kopīgie dalītāji ir **1, 2, 3, 6**, starp kuriem **6** ir lielākais kopīgais dalītājs.

Tātad $L(12; 30) = 6$.

Lai noteiktu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju, rīkojas šādi:

- skaitļus sadala pirmreizinātājos → skatīt (1)
- nosaka skaitļiem kopīgos pirmreizinātājus → skatīt (2)
- sareizina iegūtos kopīgos pirmreizinātājus → skatīt (3).

☒ Lai noteiktu $L(12; 18)$, rīkojas šādi:

(1) 12 2		(1) 18 2			
6 2		9 3			
3 3		3 3			
1	(2) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$	1	(2) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$	(3) $L(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$	

6. Aprēķini!

- a) $L(5; 6)$ b) $L(6; 8)$ c) $L(18; 27)$ d) $L(60; 80)$ e) $L(24; 30; 42)$

Savstarpēji pirmskaitļi ir skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1.



Skaitlis 12 dalās ar **1, 2, 3, 4, 6, 12**, skaitlis 35 dalās ar **1, 5, 7, 35**. Skaitļu 12 un 35 lielākais kopīgais dalītājs ir **1**, tātad skaitļi 12 un 35 ir savstarpēji pirmskaitļi.

Mazākais kopīgais dalāmais ir mazākais skaitlis, kas dalās ar dotiem skaitļiem. To apzīmē ar **M**.



Lai noteiktu $M(6; 8)$, pārbauda, ka ar 6 dalās 6, 12, 18, **24**, 30... un ar 8 dalās 8, 16, **24**,... Skaitļu 6 un 8 kopīgie dalāmie ir **24**, 48, 72 utt. Mazākais no tiem ir **24**, tātad $M(6; 8) = 24$.

Lai noteiktu skaitļu mazāko kopīgo dalāmo, rīkojas šādi:

- skaitļus sadala pirmreizinātājos → skatīt (1)
- izraksta pirmā skaitļa visus pirmreizinātājus → skatīt (2)
- pievieno tos pirmreizinātājus no otrā skaitļa sadalījuma, kuru trūkst → skatīt (3)
- sareizina iegūtos pirmreizinātājus → skatīt (3).

Lai noteiktu $M(20; 15)$, rīkojas šādi:

(1) 20 2		(1) 15 3			
10 2		5 5			
5 5		1			
1	(2) $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$		(2) $15 = 3 \cdot 5$	(3) $M(20; 15) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$	

7. Aprēķini!

- a) $M(4; 7)$ b) $M(6; 9)$ c) $M(2; 3; 5)$ d) $M(3; 7; 6)$ e) $M(5; 18)$

3. Daļas un procenti. Proporcijas

1. Lielveikalā ir izpārdošana. Preču cenas samazinātas līdz 70%. Ģimene dodas iepirkties un plāno pirkumiem iztērēt ne vairāk kā 50 latus. Meita grib nopirkt džemperu, dēls – džinsu bikses, māte – zābakus, bet tēvs – kurpes. Vai pietiks naudas, lai visi nopirktu to, ko vēlas? Aizpildi tabulu pēc parauga!

Preces nosaukums	Cena Ls	Atlaide	Atlaide Ls	Izpārdošanas cena Ls
Meiteņu džemperu	9	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ no $9 = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$	$9 - 6 = 3$
Viriešu kurpes	30	50%		
Zēnu džinsu bikses	10	45%		
Sieviešu zābaki	40	$\frac{1}{2}$		
Izpārdošanas cena visām precēm kopā, Ls				

Daļu rēķini

Daļa no skaitļa $\frac{a}{b}$ no $c = x$ $x = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}$ ☒ $\frac{2}{3}$ no 90 = x $x = 90 \cdot \frac{2}{3} = \frac{90 \cdot 2}{3} = 60$ ☒ 0,3 no 7,5 = x $x = 0,3 \cdot 7,5 = 2,25$	Skaitļa aprēķināšana, ja zināma tā daļa $\frac{a}{b}$ no $c = x$ $x = c : \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{a}$ Dalīt ar daļu nozīmē reizināt ar apgrieztu daļu! ☒ $\frac{2}{3}$ no 90 = x $x = 90 : \frac{2}{3} = \frac{90 \cdot 3}{2} = 135$ ☒ 0,27 no $x = 8,1$ $x = 8,1 : 0,27 = 810 : 27 = 30$	Viens skaitlis kā otra skaitļa daļa a pret $b = a : b = \frac{a}{b}$ Ja iespējams, daļu saīsina! ☒ 4 pret 6 = $4 : 6 = \frac{2}{3}$ ☒ 21 pret 35 = $21 : 35 = \frac{3}{5} = 0,6$ ☒ 12 sant. pret Ls 0,48 = $12 \text{ sant.} : 48 \text{ sant.} = 12 : 48 = \frac{1}{4} = 0,25$
--	---	--



Mērvienību pārveidojumi:

1 t = 1000 kg
1 kg = 1000 g
1 km = 1000 m
1 m = 100 cm
1 cm = 100 mm

2. Uzraksti kā daļu, ja iespējams, saīsini!
Aprēķinus veic tikai tad, ja ir vienādas mērvienības!

- a) 450 g pret 1,8 kg = 450 g pret 1800 g =
 b) 13 m pret 2,6 km
 c) 375 kg pret 0,5 t
 d) 0,7 Ls pret 2,8 Ls
 e) 20 min pret 3 h
 f) 1 h 15 min pret 5 h

3. Atjauno „izdzisušās” rindīņas!

a) $\frac{1}{2}$ no $4,8 = x$	b) $\frac{3}{10}$ no $x = 2,4$	c) $0,2$ no $x = 8$	d) $0,7$ no $x = 4,2$
$x = 4,8 \cdot \frac{\dots}{\dots}$	$x = 2,4 \cdot \frac{\dots}{\dots}$	$x = 8 : \dots$	$x = \dots : 0,7$
$x = \frac{4,8 \cdot 1}{\dots}$	$x = \frac{2,4 \cdot \dots}{3}$	$x = \dots : 2$	$x = 42 : \dots$
$x = 2,4$	$x = 8$	$x = 40$	$x = \dots$

4. Aprēķini x !

a) $\frac{1}{3}$ no $4,2 = x$	c) $\frac{4}{7}$ no $35 = x$	e) $0,6$ no $54,3 = x$
b) $\frac{3}{5}$ no $x = 2,4$	d) $\frac{1}{2}$ no $x = 44$	f) $0,8$ no $x = 32$

Procentu rēķini

☒ $2\% = \frac{2}{100} = 0,02$

☒ $23\% = \frac{23}{100} = 0,23$

☒ $15\% = \frac{15}{100} = 0,15$

Procenti no skaitļa	Skaitļa aprēķināšana, ja zināmi tā procenti	Viens skaitlis kā otra skaitļa procenti
$a\%$ no $c = x$ $x = c \cdot \frac{a}{100} = \frac{c \cdot a}{100}$ ☒ 60% no $5 = x$ $x = \frac{60 \cdot 5}{100} = \frac{3 \cdot 1}{1} = 3$ jeb $x = 0,6 \cdot 5 = 3$	$a\%$ no $x = c$ $x = c : \frac{a}{100} = \frac{c \cdot 100}{a}$ ☒ 45% no $x = 9$ $x = 9 : \frac{45}{100} = \frac{9 \cdot 100}{45} = \frac{9 \cdot 100^{20}}{45^{51}} = 20$ jeb $x = 9 : 0,45 = 20$	a pret $b = a : b = \frac{a}{b} = x\%$ legūto daļu paplašina līdz simtdaļām! ☒ 4 pret $5 = x$ $x = 4 : 5 = \frac{4}{5} = 0,8 = \frac{80}{100} = 80\%$ jeb $x = 4 : 5 = \frac{4^{(20)}}{5} = \frac{80}{100} = 80\%$ ☒ 9 cm pret 3 m $= 9 : 300 = \frac{9^3}{300^{100}} = 3\%$

5. Aprēķini nezināmo!

a) 3% no $800 = x$	b) 25% no $y = 28$
c) 10% no $73,4 = z$	d) 56% no $t = 14$

6. Automašīnu stāvvietā ir 80 vietas. Tagad 70% no visām vietām ir aizņemtas. Vai stāvvietā vēl var novietot 25 mašīnas?

Procents ir skaitļa **simtā daļa!**

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$



7. Ir aizpildīti 40% *Flash* atmiņas ietilpības, tas ir 819,2 MB.
Kāda ir *Flash* atmiņas ietilpība MB? Iegūto rezultātu pārveido GB, ja 1 GB = 1024 MB!

8. Vecāki Jurim iedeva kabatas naudu 10 Ls nedēļai. Juris iet uz kino. Viņš plāno nopirkt biļeti par 3,50 Ls. Aprēķini, cik % no 10 Ls Jurim atliks!



Proporcija

malējie locekļi

$a : b = c : d$ jeb

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

vidējie locekļi

Proporcijas pamatīpašība

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Proporcijas nezināmā locekļa izteikšana

$$a = \frac{b \cdot c}{d} \quad b = \frac{a \cdot d}{c} \quad c = \frac{a \cdot d}{b} \quad d = \frac{b \cdot c}{a}$$

☒ Ja gatavo upeņu ievārījumu, 5 litriem ogu jāpievieno 2kg cukura.
Cik kg cukura jāņem, ja ir 12 litri ogu?

→ No dotajiem lielumiem uzraksta atbilstības →

5 litri ogu ... 2kg cukura

12 litri ogu ... xkg cukura

→ Sastāda proporciju → $\frac{5}{12} = \frac{2}{x}$

→ No proporcijas izsaka nezināmo un aprēķina

$$\text{tā vērtību} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 2}{5} = 24 : 5 = 4,8 \text{ kg}$$

Atbilde.

Lai pagatavotu upeņu ievārījumu, ir jāņem 4,8kg cukura.

9. Celtnieks 10 dienās nopelna 250Ls. Cik latu viņš nopelna 6 dienās?



Tiešā proporcionalitāte –

cik reīzu palielinās viena lieluma skaitliskā vērtība,

tik reīzu palielinās arī otra lieluma vērtība.

Uzdevumos ar proporcionāliem lielumiem **izmanto trejskaitļu shēmu.**

☒ Ja 4 āboli sver 600 gramus, lai noskaidrotu, cik sver 7 tādi paši āboli, rīkojas šādi (*skat. tabulu*):

4 āboli	$\div 4$	600 g	$\div 4$
1 ābols	$\cdot 7$	$600 : 4 = 150 \text{ g}$	$\cdot 7$
7 āboli		$150 \cdot 7 = 1050 \text{ g} = 1 \text{ kg } 50 \text{ g}$	

- ja uzdevuma risināšanā izmanto proporcijas pamatīpašību, tad sastāda trejskaitļu shēmu → tabulā ābolu skaitu raksta zem ābolu skaita, bet to masu otrā kolonnā
- vispirms aprēķina 1 ābola masu
- aprēķina 7 ābolu masu

10. Aizpildi tabulas, zinot, ka dotie lielumi ir tieši proporcionāli!
Formulē uzdevumu tekstu!

a)	<table><tr><th>Preču skaits</th><th>Cena (Ls)</th></tr><tr><td>5</td><td>15,75</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	Preču skaits	Cena (Ls)	5	15,75	1		3		b)	<table><tr><th>Preču skaits</th><th>Cena (Ls)</th></tr><tr><td>3</td><td>4,2</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>7</td><td></td></tr></table>	Preču skaits	Cena (Ls)	3	4,2	1		7		c)	<table><tr><th>Preču skaits</th><th>Cena (Ls)</th></tr><tr><td>15</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr><tr><td>35</td><td></td></tr></table>	Preču skaits	Cena (Ls)	15	6	5		35	
Preču skaits	Cena (Ls)																												
5	15,75																												
1																													
3																													
Preču skaits	Cena (Ls)																												
3	4,2																												
1																													
7																													
Preču skaits	Cena (Ls)																												
15	6																												
5																													
35																													

Apgrieztā proporcionalitāte –

cik reīžu palielinās viena lieluma vērtība, **tik reīžu samazinās** otra lieluma vērtība.



Uzdevumos ar apgriezti proporcionāliem lielumiem vienā proporcijas pusē jāraksta apgrieztā atbilstība, bet otra pusē jāraksta tiešā atbilstība.

- ☒ Saimnieks plānoja apsēt 4ha lauka dienā. Viņš strādāja vairākas dienas. Katru dienu viņš apsēja 6ha un darbu pabeidza 3 dienas pirms plānotā termiņa. Cik dienas bija plānots sēt? Cik dienās veica paredzēto darbu? Cik ha lauka apsēja?

- no dotajiem lielumiem uzraksta atbilstības →

4ha dienā ... x dienas

6ha dienā ... $x - 3$ dienas

- sastāda proporciju.

Ņem vērā apgriezti proporcionālus lielumus! → $\frac{4}{6} \cdot \frac{x-3}{x}$

- izmantojot proporcijas pamatīpašību, uzraksta **vienādojumu** → $4x = 6(x - 3)$

- atver iekavas → $4x = 6x - 18$

- pārnes saskaitāmo, tā zīmi maina uz pretējo → $4x - 6x = -18$

- atņem līdzīgos saskaitāmos ($4 - 6 = -2$) → $-2x = -18$

- vienādojuma abas puses izdala ar (-2) → $x = (-18) : (-2)$

$x = 9$ ← *tik dienas bija plānots sēt*

$x - 3 = 9 - 3 = 6$ ← *tik dienās pabeidza sēju*

$4 \cdot 9 = 36$ ← *tik ha apsēja*

Atbilde.

Plānoja sēt 9 dienas, bet pabeidza sēju 6 dienās. Apsēja 36 ha.

11. Grāmatas tulkotāja plānoja katru dienu iztulkot 8 lappuses. Viņa katru dienu iztulkoja tikai 6 lappuses, tāpēc bija jāstrādā par 5 dienām ilgāk. Cik dienās tulkotāja plānoja iztulkot grāmatu? Cik dienās viņa pabeidza darbu? Cik lappuses iztulkoja?

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Daļas $\frac{4}{5}$ skaitītājs ir skaitlis
- (1 p.) 2. $\frac{2}{7}$ no 42 ir
- (1 p.) 3. Cik minūšu ir stundas $\frac{1}{12}$ daļā?
- (2 p.) 4. Cik santīmu ir 20% no 3 latiem?
- (2 p.) 5. Dārzā aug 6 ābeles jeb $\frac{3}{5}$ no visiem kokiem.
Cik koku ir dārzā?
- (2 p.) 6. Grāmatā ir 390 lappuses. Zēns izlasīja 130 lappuses.
Kāda daļa no grāmatas vēl jālasa?
- (2 p.) 7. Ražošanā 2% jeb 14 detaļas no dienā izgatavotajām bija brāķis.
Cik detaļu izgatavoja vienā dienā?
- (3 p.) 8. Klasē ir 17 meitenes, bet zēnu ir par 9 mazāk.
Cik % no visiem skolēniem ir zēni?
- (3 p.) 9. Sētnieks 300 m^2 var uzskopt 2 stundās.
Cik stundās viņš uzskops 750 m^2 ?
- (3 p.) 10. 18 zirgiem barības pietiek 5 dienām.
Cik dienām pietiktu barības, ja būtu 10 zirgi?

4. Pakāpes, to īpašības.

Pakāpes ar negatīvu kāpinātāju

Skaitļa pakāpes

Iemācies lasīt skaitliskās izteiksmes!

Izteiksme	To lasa:	Izteiksme	To lasa:
$2 + 3$	„skaitļu 2 un 3 summa”	2^2	„skaitļa 2 kvadrāts”
$6 - (-4)$	„skaitļu 6 un -4 starpība”	2^3	„skaitļa 2 kubs”
$2 \cdot 3$	„skaitļu 2 un 3 reizinājums”	2^4	„skaitļa 2 ceturta pakāpe”
$2 : 3$	„skaitļu 2 un 3 dalījums”	$3^2 \cdot 2^2$	„skaitļu 3 un 2 kvadrātu starpība”

1. Uzraksti tekstam atbilstošo matemātisko izteiksmi!
Atrisini, ja tas ir iespējams!

- skaitļa 5 kvadrāts
- skaitļa a kubs
- skaitļu 3 un $-1\frac{1}{3}$ kvadrātu starpība
- skaitļu b un 3 summas kvadrāts
- skaitļu $-\frac{4}{5}$ un $-\frac{2}{3}$ kvadrātu reizinājums
- skaitļa -3 divkārsots kvadrāts.



divkārsots – reizina ar 2
trīskārsots – reizina ar 3

$a^b = c$
 ↗ kāpinātājs
 ↘ kāpināšanas bāze
 ← pakāpe

2. Aizpildi tabulas!

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	...
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	...
...	...	...	...

a – bāze	b – kāpinātājs	c – pakāpe
2	3	
	2	64
		25
-1		-1
1	100	
0,3		0,027

3. Rēķini un sakārto atbildes augošā secībā! Ja aprēķins būs pareizs, tad izlasīsi vārdu!

$-5 \cdot 2^4$	$(6 + 4)^2$	$11 - 3^4$	$7^2 + 3^3$	$4^3 - 2^2$	$(-2)^3 \cdot 5$	$2^4 - 3^2$	$(6 - 8)^5$
g	s	u	i	t	d	ī	r

Kāpināšanas īpašības



$$\boxed{\times} (-6)^0 = 1; 4^1 = 4$$

Pakāpju īpašības

$$a^0 = 1 \text{ un } a^1 = a$$

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\textcircled{2} a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\textcircled{3} (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\textcircled{4} a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\textcircled{5} (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\textcircled{6} \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\textcircled{7} \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$\textcircled{1} 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

$$\textcircled{1} 3^x \cdot 3^{x+1} = 3^{x+x+1} = 3^{2x+1}$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{1}{4}\right)^6 : \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{6-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\textcircled{2} 4^{n+3} : 4^n = 4^{n+3-n} = 4^3 = 64$$

$$\textcircled{2} \frac{(-0,2)^5}{(-0,2)^3} = (-0,2)^{5-3} = (-0,2)^2 = 0,04$$

$$\textcircled{3} (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

$$\textcircled{4} 2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 100$$

$$\textcircled{5} (2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$$

$$\textcircled{6} \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

$$\textcircled{7} \frac{100^3}{50^3} = \left(\frac{100}{50}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Uzdevumu risināšanā jāizmanto viena vai vairākas formulas un jāievēro darbību secība.

$$\boxed{\checkmark} \quad \frac{7^3 \cdot 7^{12}}{7^{14}} = \frac{7^{15}}{7^{14}} = 7^{15-14} = 7^1 = 7$$

$$\boxed{\checkmark} \quad (x^5)^4 \cdot (x^6)^7 = x^{5 \cdot 4} \cdot x^{6 \cdot 7} = x^{20} \cdot x^{42} = x^{62}$$

$$\boxed{\checkmark} \quad \frac{4^7 \cdot 16}{(4^2)^4} = \frac{4^7 \cdot 4^2}{4^{2 \cdot 4}} = \frac{4^9}{4^8} = 4^{9-8} = 4$$

$$\boxed{\checkmark} \quad \frac{27^2 \cdot 9^4}{81^2} = \frac{(3^3)^2 \cdot (3^2)^4}{(3^4)^2} = \frac{3^6 \cdot 3^8}{3^8} = \frac{3^{14}}{3^8} = 3^6 = 729$$

$$\boxed{\checkmark} \quad \frac{14^5}{2^4 \cdot 7^5} = \frac{(2 \cdot 7)^5}{2^4 \cdot 7^5} = \frac{2^5 \cdot 7^5}{2^4 \cdot 7^5} = 2^{5-4} = 2$$

$$\boxed{\checkmark} \quad \frac{3^5 \cdot 4^5}{12^4} = \frac{(3 \cdot 4)^5}{12^4} = \frac{12^5}{12^4} = 12^{5-4} = 12$$

4. Risini! Izmanto pakāpju īpašības!

a) $4^2 \div 4$

d) $\frac{(3^2)^3 \div 3^4}{(3^3)^3 \div 2^3}$

g) $\frac{2^7 \div 3^7}{3^7} \div 1,5^7$

b) $(3^2 \div 3^0)^2$

e) $\frac{(2^4 \div 2^3 \div 2^0)^2}{(2 \div 2^2)^3}$

h) $\frac{4^6 \div 2^7}{8^5}$

c) $\frac{3^5 \div 4^5}{3^3 \div 4^4}$

f) $(2 \div 3)^3 \div \frac{2^2}{3^2}$

i) $\frac{3^4 \div 4^4}{12^3}$

5. Lai iegūtu pareizu vienādību, zvaigznītes * vietā liec atbilstošo izteiksmi!

a) $x^2 \cdot * = x^8$

e) $(x^4)^3 \cdot * = x^{15}$

i) $(x^{10} \div *)^2 = x^4$

b) $(x^2)^3 \cdot (*)^2 = x^{14}$

f) $x^8 \div * = x^3$

j) $(x^3)^5 \div * = x^7$

c) $(x^3 \cdot *)^3 \div x^{11} = x$

g) $\frac{x^2 \cdot *}{x^5} = x^7$

k) $(*)^2 = x^6$

d) $x^2 \cdot (*)^3 = x^{14}$

h) $(x^2 \cdot x^3)^2 \cdot * = x^{12}$

l) $\frac{x^{12} \cdot x^3}{*} = (x^3)^2$

Skaitlis ar negatīvu veselu kāpinātāju



☒ $4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

☒ $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Izteiksmes ar negatīvām pakāpēm pārveido atbilstoši pakāpju īpašībām.



☒ 1 a) $3^5 \cdot 3^{-2} = 3^{5+(-2)} = 3^3 = 27$

☒ 2 b) $2^3 \div 2^{-2} = 2^{3-(-2)} = 2^5 = 32$

☒ 3 c) $(3^{-2})^{-1} = 3^{(-2)\cdot(-1)} = 3^2 = 9$

a un $\frac{1}{a}$ ir

**savstarpēji apgriezti
skaitļi**

6. Aprēķini! Ievēro darbību secību!

a) $2^{-3} + 4^{-2}$

b) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2} + (-1,8)^0 - 5^{-1}$

c) $(2^{-1} \div 3^2)^{-1}$

d) $\left(3\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{7}\right)^1$

e) $(5^{-1} + 3^{-1} \cdot 9)^{-1}$

f) $2^{-1} - 3^{-1}$

h) $(2^{-1} + 3^2)^{-1}$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$

☒ Lai salīdzinātu $(0,2)^{-3}$ un 5^2 , rīkojas šādi:

➔ izpilda pirmā skaitļa kāpināšanu ➔

$$\rightarrow (0,2)^{-3} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 5^3 = 125$$

➔ izpilda otrā skaitļa kāpināšanu ➔ $5^2 = 25$

➔ salīdzina iegūtos rezultātus ➔ $125 > 25$, tātad $(0,2)^{-3} > 5^2$.

7. Salīdzini!

a) 2^2 un 2^{-2}

b) $2^2 \cdot 2^3$ un 2^{2+3}

c) 3^{-2} un 3^{-4}

d) 2^{-5} un 3^{-5}

e) $(0,2)^{-3}$ un $(0,5)^{-3}$

f) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ un $\left(\frac{1}{4}\right)^0$

g) 5^{-3} un $0,2^3$

h) -2^2 un $(-2)^2$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ un 3^2

j) 10^7 un $2^8 \cdot 5^7$

8. Izlabo kļūdas atrisinājumos! Ieraksti taisnstūrī pareizo atrisinājumu!

1) $5^0 = 5$		9) $(2^3)^2 = 9$	
2) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4^3$		10) $(3^2)^1 = 3^3$	
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$		11) $3^4 - 3^2 = 3^2$	
4) $2^2 + 2^4 = 2^6$		12) $-4^0 = 1$	
5) $(-2)^2 = -2 \cdot 2 = -4$		13) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = 2^5$	
6) $2^2 \cdot 2^3 = 4^5$		14) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$	
7) $4^6 : 4^3 = 4^2$		15) $12^2 : 3^2 = 4^1$	
8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = -\frac{4}{9}$		16) $3^2 + 2^2 = 5^2$	

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

(1 p.) 1. Pieraksti īsāk izteiksmi $x \cdot x \cdot x \cdot x$!

(1 p.) 2. Salīdzini $(-1)^{10}$ un $(-1)^{11}$!

(1 p.) 3. Vienkāršo $a^2 \cdot a^5$!

- (2 p.) 4. Uzraksti skaitļu 2 un z kvadrātu summu!
- (2 p.) 5. Aprēķini $5^2 \cdot 0,2^2$!
- (2 p.) 6. Salīdzini $(0,2)^{-3}$ un $(0,2)^{-4}$!
- (2 p.) 7. Aprēķini izteiksmes $\frac{6^6}{36^2}$ vērtību!
- (3 p.) 8. Sakārto skaitļus 1^4 ; 2^{-2} ; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ un $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ augošā secībā!
- (3 p.) 9. Aprēķini izteiksmes $-(-4)^{-3}$ vērtību!
- (3 p.) 10. Salīdzini $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$ un 3^7 !

5. Izteiksmes ar mainīgajiem. Monomi. Polinomi. Saīsinātās reizināšanas formulas



Darbību secība

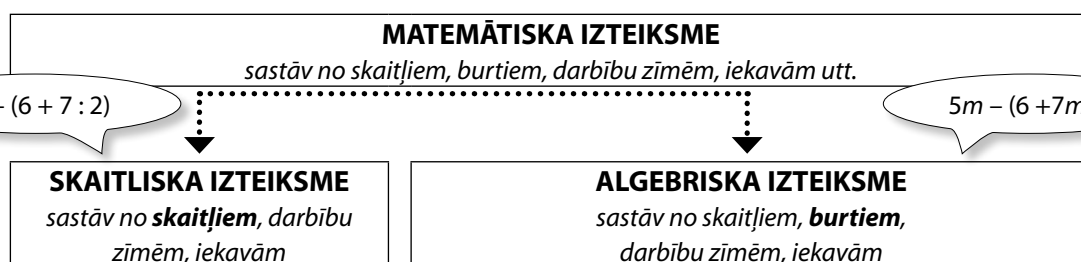
$$a + b \cdot (c - d : e)$$

4 3 2 1

1.

a) Dārzā iestādīja 10 ābeles, bumbieres par 3 vairāk nekā ābeles un ķiršus 2 reizes vairāk nekā ābeles. Cik augļu kokus iestādīja dārzā? Uzraksti izteiksmi, kā aprēķina koku skaitu dārzā!

b) Dārzā iestādīja ābeles, bumbieres par 3 vairāk nekā ābeles un ķiršus 2 reizes vairāk nekā ābeles. Cik augļu kokus iestādīja dārzā? Uzraksti izteiksmi, kā aprēķina koku skaitu dārzā!



Skaitliskās izteiksmes VĒRTĪBA

To iegūst, izpildot darbību

$$\begin{aligned} 54 - (6 + 7 : 2) &= \\ &= 54 - (6 + 3,5) = \\ &= 54 - 9,5 = \\ &= 44,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(b - c) &= -b + c \\ +(b - c) &= b - c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2 + x) &= \\ &= 6 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5a + 3b)^2 &= \\ &= 25a^2 + 30ab + 9b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8x - 2 &= \\ &= 2(4x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x + 7. \\ \text{Ja } x &= 1, \text{ tad} \\ P(1) &= 3 \cdot 1 + 7 = 10 \end{aligned}$$

Darbības ar algebriskajām izteiksmēm

→ **iekavu atvēršana un ielēgšana iekavās**

+ (izteiksme) → izteiksme nemainās

- (izteiksme) → izteiksmē mainās zīme uz pretējo

$a \cdot (\text{izteiksme})$ → izteiksmē katru locekli reizina ar a

→ **līdzīgo locekļu savilkšana**

saskaita vai atņem **koeficientus** (skaitļus), bet **mainīgie** (burti) nemainās

→ **saīsinātās reizināšanas formulas lietošana**

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ (kvadrātu starpība)

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (starpības kvadrāts)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (summas kvadrāts)

→ **sadalīšana reizinātājos**

iznesot pirms iekavām kopīgo reizinātāju
saīsināto reizināšanas formulu izmantošana
grupēšanas paņēmiena izmantošana

→ **izteiksmes VĒRTĪBAS aprēķināšana**

izteiksmē mainīgā vietā ievieto skaitli un izpilda darbības

✓ $5 + 3 \rightarrow$ ir skaitļu 5 un 3 **summa** (skaitliska izteiksme);

✓ $2(m - n) \rightarrow$ ir divkārtšota skaitļu m un n **starpība** (algebriska izteiksme);

✓ $(x - y)^3 \rightarrow$ ir skaitļu x un y starpības **kubs** (algebriska izteiksme);

✓ $(t + p)(t - p) \rightarrow$ ir skaitļu t un p summas un starpības **reizinājums** (algebriska izteiksme).

2. Tabulas kreisajā kolonnā uzraksti algebrisku izteiksmi!

1)	skaitļu k un c summa
2)	trīskāršota skaitļu a un b starpība
3)	skaitļu x un y kvadrātu starpība
4)	skaitļu v un r summas kvadrāts
5)	skaitļu t un m kubu summa

3. No dotajām izteiksmēm pirmajā stabiņā izraksti skaitliskas izteiksmes, bet otrajā stabiņā – algebriskas izteiksmes kopā ar burtu! Izlasi vārdus, ko izveidoja katra stabiņa burti!

(T) $(3 + 4)^3$	(D) $1 - 2x$	(E) $-1 + 5 \cdot 3x$	(E) 25% no 7^3
(Ā) $(2 + x): 7$	(V) $(a - b)^2$	(V) $\frac{6+5}{2 \cdot (8-1)}$	(I) $\frac{a+b}{a^2}$
(Z) x	(S) $1 + m$		

4. Aprēķini izteiksmes $A(x) = 2x - 5$ vērtību, ja

- a) $x = 3$ b) $x = -2$ c) $x = 0,3$ d) $x = -\frac{1}{5}!$

Algebriskas izteiksmes sastādīšana

Klasē meiteņu ir par 7 vairāk nekā zēnu. Cik skolēnu ir klasē? Uzraksti algebrisku izteiksmi, kā aprēķina skolēnu skaitu klasē!

Lai uzrakstītu algebrisku izteiksmi, kā aprēķina skolēnu skaitu klasē, rīkojas šādi:

- apzīmē zēnu skaitu ar $\rightarrow z$, tad meiteņu skaitu izsaka izteiksme $\rightarrow z + 7$.
- saskaita zēnu un meiteņu skaitu kopā
 $\rightarrow z + (z + 7) = z + z + 7 = 2z + 7$.

Atbilde. Klasē ir $2z + 7$ skolēni.

5. Par autobusa īri stundā jāmaksā a lati par stundu un vēl b lati par katru nobraukto kilometru.

Kura no dotajām izteiksmēm izsaka autobusa īres izmaksas, ja ekskursijas ilgums ir 10 stundas, bet ceļa garums ir 250 km?

- a) $260ab$ b) $250a + 10b$ c) $250b + 10a$ d) $2500(a+b)$

6. Sviesta daudzumu S , ko var iegūt no 100 litriem piena, ja tā tauku procents ir t , var aprēķināt pēc formulas $S(t) = 1,2t - 0,2$. Aprēķini, cik kg sviesta var iegūt no 100 l piena,

- ja tā tauku procents ir a) 4 ; b) 3,8; c) 3,5!

Definīcijas apgabals

Algebriskajā izteiksmē ne vienmēr var ievietot jebkuru skaitli. Tas atkarīgs no uzdevuma teksta vai darbībām, kuras jāizpilda. Katrai izteiksmei jābūt ne tikai matemātiski pareizai, bet arī jāatbilst dzīves īstenībai.



Definīcijas apgabals ir visu to *mainīgā* (x) vērtību kopa, ar kurām izteiksmei ir jēga.



Dalīt ar 0 nedrīkst!

☑ Izteiksmes $(x - 3)^2$ definīcijas apgabals ir jebkurš reāls skaitlis. Īsāk to pieraksta $x \in R$.

☑ Klasē ir k skolēni, tad mainīgā k vērtība ir naturāls skaitlis, pie tam ne pārāk liels. k var būt robežās no 1 līdz 40 (k nevar būt -10 vai $20,5$ u. c., jo uzdevums ir par cilvēkiem).

☑ Izteiksmes $\frac{x+5}{x-7}$ definīcijas apgabals ir visu reālo skaitļu kopa, izņemot 7, jo tajā ievietojot x vietā 7, saucējā iegūst nulli, bet ar nulli dalīt nedrīkst.

Atbilde var pierakstīt ar skaitļu intervālu apvienojumu:
 $x \in (-\infty, 7) \cup (7, +\infty)$.

7. Nosaki izteiksmes definīcijas apgabalu!

a) $5x - 1$

b) $2x : (x - 2)$

c) $\frac{3}{x^2 - 1}$

d) $(4x + 7)^2$

Izteiksmju vienkāršošana – iekavu atvēršana un līdzīgo locekļu savilkšana

☑ $7a + 5a - a + 1 = 11a + 1$

☑ $a \cdot (b - c) = ac - bc$

☑ $3x - (x + 5) + (4x - 2) =$
 $= 3x - x - 5 + 4x - 2 = 6x - 7$

☑ $(10x - 1) : 5 + (9x + 2) \cdot 3 =$
 $= 10x : 5 - 1 : 5 + 9x : 3 + 2 \cdot 3 =$
 $= 2x - 0,2 + 27x + 6 = 29x + 5,8$

8. Atver iekavas un savelc līdzīgos locekļus!

a) $4a - 3a + a$

c) $7(x + 2) + (4 - x)$

e) $0,5(4x + 6) - 2(0,5 + x)$

b) $5b - (7b + 1)$

d) $(6m - 4n) \cdot 2 + m - n$

f) $(30a^2 - 10) : 5 + a \cdot a - a$

9. Uzraksti izteiksmi, kura apraksta doto situāciju! Vienkāršo izteiksmi!

- a) No viena lauka novāca x tonnas kartupeļu, bet no otra lauka 2 reizes vairāk. Cik tonnu kartupeļu novāca no abiem laukiem kopā?
- b) No pilsētas vienlaicīgi pretējos virzienos izbrauca divas automašīnas. Vienai no tām ātrums bija v km/h, bet otrai par 10 km/h mazāks. Kāds attālums būs starp mašīnām pēc 2 h?
- c) Skolēnam bija Ls 5. Viņš nopirka k burtnīcas par 8 santīmiem katru un b klades par 46 santīmiem katru. Cik santīmu skolēnam atlika pēc pirkuma izdarīšanas?

Monomi un polinomi

Monoms ir skaitļu, mainīgo (burtu) un pakāpju **reizinājums**. Reizināšanas zīmi starp skaitli un burtu parasti neraksta.



☒ $-2a^3$ ☒ $0,1ny$ ☒ 5 ☒ $3x$ ☒ $-\frac{7x}{8}$ ☒ y

Koeficients ir **skaitlis** burtu priekšā.
Skaitli **1** burta priekšā var nerakstīt.

Polinoms ir monomu **algebriskā summa**.

Monomi, no kuriem veidots polinoms, ir **polinoma locekļi**.



☒ $2x + 3y - x$ ☒ $a - 4b^2 + 1$ ☒ $m - 5m$

Līdzīgie locekļi ir monomi, kuriem **mainīgie ir vienādi**.
Polinoma līdzīgos locekļus savēl, saskaitot to koeficientus.

Darbības ar monomiem un polinomiem

Monomus un polinomus **saskaitīt** vai **atņemt** nozīmē atvērt iekavas un savilkt līdzīgos locekļus.



☒ $(x + 2) + (x - 2 + y) = \underline{x} + \underline{2} + \underline{x} - \underline{2} + y = 2x + y$

☒ $7x + (x - 4) - (14x - 2) = \underline{7x} + \underline{x} - \underline{4} - \underline{14x} + \underline{2} = -6x - 2$

+ (iekavas) saskaitāmo zīmes **nemaina**

- (iekavas) saskaitāmo zīmes **maina uz pretējām**



10. Saskaiti vai atņem monomus un polinomus!

a) $6 + (3a - 1) - (4 + 2a)$

b) $(3x^2 + 4y) - (1 - x^2 + y)$

c) $mn - (5 - 7mn) - 8 + (6mn - 1)$



Monomu reizināšanā, kāpināšanā un dalīšanā izmanto likumus par pakāpēm.

Vispirms izpilda darbības ar koeficientiem, pēc tam ar mainīgajiem.



✓ $5x^2 \cdot 0,3xy^7 = (5 \cdot 0,3) \cdot (x^2 \cdot x) \cdot y^7 = 1,5x^{2+1} \cdot y^7 = 1,5x^3y^7$

✓ $(-3a^4b^2x)^3 = (-3)^3 \cdot (a^4)^3 \cdot (b^2)^3 \cdot x^3 = -27a^{12}b^6x^3$

$a^0 = 1$ un $a^1 = a$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\frac{a^m}{b} = \frac{a^m}{b^1}$

✓ $4m^5n^3k : 6mn^2k = (4 : 6) \cdot (m^5 : m) \cdot (n^3 : n^2) \cdot (k : k) = \frac{2}{3} \cdot m^{5-1}n^{3-2}k^{1-1} = \frac{2}{3}m^4n$

11. Izpildi darbības ar monomiem!

a) $6a^2 \cdot 2a^3b$

b) $-1,3xy^4 \cdot 3x^5$

c) $(-0,5ac^6)^2$

d) $(5x \cdot 2b^5x^2)^3$

e) $12x^9 : (-6x^3)$

f) $a^8b^5 : 10a^5b^5$

$a + a = 2a$

$a \cdot a = a^2$

$a : a = 1$

$4a : 2a = 2$

$2a - a = a$



Polinoma reizināšana un dalīšana ar monomu

$a \cdot (b + c - d) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$ $(m + n) : k = m : k + n : k$

✓ $-2x \cdot (x^2 + 3x - 4) = -2x \cdot x^2 - 2x \cdot 3x - 2x \cdot (-4) = -2x^3 - 6x^2 + 8x$

✓ $(3a^6b^3 - a^4b) : (-5a^3b) = 3a^6b^3 : (-5a^3b) - a^4b : (-5a^3b) = -0,6a^3b^2 + 0,2a$

12. Izpildi darbības ar monomiem un polinomiem!

a) $(x - 7) \cdot x + 9x - x(x + 2)$

c) $5xy^2(2x^2y - 3xy^2) - 10x^3y^3$

b) $(12a^2b - 15ab^2) : 3ab + 5b$

d) $5a + (25a^2b^4 + 35ab^2) : 5ab - 7b$

Polinoma reizināšana ar polinomu (reizināšanas zīmi parasti neraksta)

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$



☑ $(m - n)(x + y) = x + my - nx - ny$

☑ $(x + 5)(3 - x) = \underline{3x} - x^2 + 15 - \underline{5x} = x^2 - 2x + 15$

☑ $(a - 1)(a + 10) + 5a = a^2 + \underline{10a} - \underline{a} - 10 + \underline{5a} = a^2 + 14a - 10$

☑ $(2 + b)(c - 6) - (b + 4) = \underline{2c} - 12 + bc - 6b - bc - \underline{4c} = -6b - 2c - 12$

13. Sareizini polinomus un vienkāršo izteiksmes!

a) $(z + 1)(z - 8) - z^2$

c) $(a - 7)(a + 2) + (14 - a)(a + 1)$

b) $4mn + (m - n)(2m + 3n)$

d) $(k - 1)(k + v) - (k - v)(k + 1)$

Saīsinātās reizināšanas formulas

☑ ① $(a - 4)(a + 4) = a^2 - 4^2 = a^2 - 16$

② $(x - 9)^2 + 18x = x^2 - \underline{18x} + 81 + \underline{18x} = x^2 + 81$

③ $5mn - (2m + 3n)^2 = 5mn - (4m^2 + 12mn + 9n^2) = \underline{5mn} - 4m^2 - \underline{12mn} - 9n^2 = -4m^2 - 7mn - 9n^2$

14. Iztrūkstošo polinoma locekli ieraksti zvaigznītes * vietā!

a) $(a - *)(a + *) = a^2 - 9$

c) $(m - 7)^2 = m^2 - * + 49$

b) $(a + 5)^2 = a^2 + * + 25$

d) $(* - x) = y^2 - 2xy + x^2$

15. Vienkāršo izteiksmes!

a) $(x - y)^2 - x(x - 2y)$

d) $3(x^2 + 2y) - (2x + 3y)^2 - 6y$

b) $(a + 5)^2 + (a - 5)^2$

e) $(4a - 1)(2a - 3) + 2a - 3$

c) $(n - 4)(n + 4) - n(n - 8)$

f) $(3x^2 + 6x) : 3x - (x + 2)$

16. Aprēķini skaitliskās izteiksmes vērtību! Izmanto saīsinātās reizināšanas formulas!

$$\frac{560^2 - 140^2}{280^2 - 70^2} + \frac{748^2 + 2 \cdot 748 \cdot 252 + 252^2}{10^6}$$



Kvadrātu starpības formula

① $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Starpības vai summas kvadrāta formula

② $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Polinoma sadalīšana reizinātājos

$$ab + ac = a(b + c)$$

Iznest pirms iekavām kopīgo reizinātāju **nozīmē katru** polinoma locekli **izdalīt** ar kopīgo reizinātāju.

☒ $9x^3 - 3x^4 = 3x^3(3 - x)$

☒ $a + 3ab - 5abc = a(1 + 3b - 5bc)$

☒ $2m(a + 1) - 7(a + 1) = (a + 1)(2m - 7)$

☒ $5a + 5b - ax - bx = 5(a + b) - x(a + b) = (a + b)(5 - x)$

17. Sadali reizinātājos!

a) $6kn + 4k$

b) $x^2 - 2x$

c) $4a^2 - 36$

d) $y^3 + 3y^2 - 3y$

e) $5(a + b) - x(a + b)$

f) $9x^2 + 12x + 4$

g) $c - d + y(c - d)$

h) $km - kn + 9m - 9n$

i) $81 - 72m + 16m^2$

18. Pētnieciskais uzdevums

1. *mēģinājums.* Izvēlies jebkurus divus skaitļus! Pie šo skaitļu summas pieskaiti šo pašu skaitļu starpību. Rezultātu dāli ar 2!

Mēģinājumu atkārtoti 3 reizes! Uzraksti secinājumus!

2. *mēģinājums.* No skaitļu summas atņem šo skaitļu starpību un rezultātu dāli ar 2!

Mēģinājumu atkārtoti 3 reizes! Uzraksti, kādu likumsakarību saskatīji!

3. *mēģinājums.* Apzīmē iedomātos skaitļus ar burtiem a un b , izdari iepriekš norādītās darbības un izskaidro novēroto!

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Vienkāršojot izteiksmi $4a - 3a + a$, iegūst ...
- (1 p.) 2. Ja $b = 2$, tad izteiksmes $5b - 7b - 1$ skaitliskā vērtība ir ...
- (1 p.) 3. Skaitļu c un d summas kvadrāts ir izteiksme ...
- (2 p.) 4. Izteiksmei $\frac{x+5}{x-5}$ nav jēgas, ja x vērtība ir ...
- (2 p.) 5. Ja vienkāršo izteiksmi $3(x + 1) - 5x(2 - x)$, tad iegūst ...
- (2 p.) 6. Ja sareizina polinomus $(2a + 4b)(a - b)$ un savelk līdzīgos locekļus, tad iegūst ...
- (2 p.) 7. Vienkāršo izteiksmi $(m - 7n)^2$ un uzraksti iegūto rezultātu!
- (3 p.) 8. Guntim ir 1 lats. Viņš nopērk x zīmuļus par 6 santīmiem katru un y pildspalvas par 19 santīmiem katru. Uzraksti izteiksmi, pēc kuras var aprēķināt, cik naudas Guntim atlika.
- (3 p.) 9. Pielieto saīsinātas reizināšanas formulas! Kura izteiksme nav identiski vienāda ar pārējām?

A. $\left(u + \frac{1}{2}\right)^2$ B. $\left(-u - \frac{1}{2}\right)^2$ C. $u^2 + u + 0,25$ D. $u^2 + u + 1$

- (3 p.) 10. No laivu piestātnes pa upi divas tūristu grupas vienlaicīgi dodas pretējos virzienos. Upes straumes ātrums ir 2 km/h. Cik liels būs attālums starp laivām pēc 1 stundas, ja abu laivu ātrums stāvošā ūdenī ir vienāds?

6. Lineārs vienādojums.

Lineāro vienādojumu sistēma

- ☑ Zēnam ir 60 santīmi. Viņš nopirka 2 burtnīcas, bet par atlikušo naudu varēja nopirkt vēl 4 burtnīcas. Cik maksā viena burtnīca?

Atrisinājums.

x ... tik santīmu maksā viena burtnīca;
 $2x$... tik santīmu zēns samaksāja par divām burtnīcām;
 $4x$... tik santīmu zēnam būtu jāmaksā par četrām burtnīcām;
 $60 - 2x$... tik santīmu zēnam atlika, kad viņš samaksāja par divām burtnīcām.

$$4x = 60 - 2x$$

$$4x + 2x = 60$$

$$6x = 60$$

$$x = 60 : 6$$

$$x = 10$$

Atbilde. Viena burtnīca maksā 10 santīmu.



Vienādojumu var pārveidot formā $ax + b = 0$, kur a un b ir **skaitļi**, bet x ir **mainīgais**.

Tas ir **lineārs vienādojums**. Skaitļi a un b ir **koeficienti**.

Atrisināt vienādojumu nozīmē atrast visus tos skaitļus, kurus **ievie-**
tojot mainīgā x vietā, iegūst **patiesu skaitlisku vienādību**. Vienā-
dojuma **atrisinājumu** sauc par **sakni**.

- ☑ Vienādojums $5x - 10 = 0$ ir lineārs vienādojums. Tā sakne ir 2, jo $5 \cdot 2 - 10 = 0$.

Lai atrisinātu vienādojumu $ax + b = 0$, izmanto divas **īpašības**, kuras sauc par **ekvivalentiem pārveidojumiem**.



- 1) Vienādojuma **abām pusēm** drīkst **pieskaitīt vai atņemt** vienu un to pašu skaitli vai izteiksmi.

Praktiski rīkojas šādi:

- izteiksmi ar mainīgo ax **atstāj** vienādojuma **kreisajā pusē**, bet **skaitli b pārnēs uz labo pusi**, mainot tā zīmi uz pretējo
→ $ax + b - b = 0 - b$
 $ax = -b$



- 2) Vienādojuma **abas puses** drīkst **reizināt vai dalīt** ar vienu un to pašu skaitli, **kurš nav nulle**.

Praktiski rīkojas šādi:

→ vienādojuma labo un kreiso pusi dala ar skaitli a

$$\rightarrow ax : a = -b : a \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

✓ $3x + 15 = 0$

$$3x = -15$$

$$x = -15 : 3$$

$$x = -5$$

✓ $1 - 7x = 1$

$$-7x = 1 - 1$$

$$-7x = 0$$

$$x = 0 : (-7)$$

$$x = 0$$

✓ $2x - 1 = 6x - 4$

$$2x - 6x = -4 + 1$$

$$-4x = -3$$

$$x = -3 : (-4)$$

$$x = \frac{3}{4} = \text{jeb } x = 0,75$$

Vienādojuma $ax + b = 0$ sakņu skaits.

Ja $a \neq 0$, bet b
ir jebkurš skaitlis,
tad ir
viena sakne $x = -\frac{b}{a}$

Ja $a = 0$, bet $b \neq 0$,
tad **nav sakņu** $\emptyset$

Ja $a = 0$, un $b = 0$,
tad **sakne ir jebkurš**
skaitlis $x \in R$

✓ $0,2x - 4 = 0$

$$0,2x = 4$$

$$x = 4 : 0,2$$

$$x = 20$$

Atbilde. $x = 20$

✓ $5x - (x + 6) = 4x$

$$5x - x - 6 = 4x$$

$$4x - 4x = 6$$

$$0 \neq 6$$

Atbilde. $\emptyset$

✓ $2 - 3x(x - 1) = 3x - 1$

$$2 + 3x - 3 = 3x - 1$$

$$3x - 1 = 3x - 1$$

$$3x - 3x = -1 + 1$$

$$0 = 0$$

Atbilde. $x \in R$

1. Atrisini lineārus vienādojumus!

a) $2x - 8 = 0$

b) $3x - 30 = 6 - 6x$

c) $5(2x + 6) = 6x - 14$

d) $5 + x = x - 5$

e) $1 + 2(2x + 7) = 4(x - 1) + 19$

f) $4x = 8x$

g) $3,5x - 5 = 0,5x$

h) $2x - (6,2 + x) = x - 3,4$

i) $9 + 8x = 2x + 3(2x + 3)$

✗ Ja no 100 atņem trīskāršotu nezināmo skaitli, tad iegūst pieckāršotu nezināmo skaitli.

Atrisinājums. x ... nezināmais skaitlis.

$$100 - 3x = 5x$$

$$-3x - 5x = -100$$

$$-8x = -100$$

$$x = -100 : (-8)$$

$$x = 12,5$$

Atbilde. Nezināmais skaitlis ir 12,5.

2. Uzraksti doto apgalvojumu kā vienādojumu! Apzīmē nezināmo skaitli ar x !

Atrisini uzrakstīto vienādojumu!

- a) Ja nezināmo skaitli pareizina ar 6, tad atņem 3, rezultātā iegūst divkārtu nezināmo skaitli.
- b) Ja nezināmajam skaitlim pieskaita 4, rezultātu reizina ar 4, tad atņem 4, rezultātā iegūst 4.
- c) Ja no nezināmā skaitļa atņem 9 un iegūto rezultātu divkārtu, tad iegūst nezināmo skaitli.
- d) Ja nezināmo skaitli pareizina ar 7, tad atņem 1, iegūst 8.

3. Zemnieki iestādīja 42 augļu kokus. Cik dažādu šķirņu augļu koku iestādīja, ja bumbieru bija 2 reizes vairāk nekā ķiršu, bet ābeļu bija 3 reizes vairāk nekā ķiršu?

4. Dēls ir par 22 gadiem jaunāks nekā tēvs, bet vectēvs ir par 26 gadiem vecāks nekā tēvs. Cik gadu katram, ja mazdēls ir 4 reizes jaunāks par vectēvu?

- ☒ Divas draudzenes iepirkās. Viņas iztērēja vienādu naudas summu. Viena nopirka 3 sierīņus „Kārums” un ābolu sulu, bet otra nopirka 2 tādus pašus sierīņus un apelsīnu sulu. Cik maksā viens sierīņš, ja ābolu sula maksā 46 santīmus, bet apelsīnu sula maksā 64 santīmus? Cik naudas iztērēja katra meitene?

Atrisinājums:

x ... tik santīmu maksā viens sierīņš.

$3x + 46$... tik santīmu samaksāja viena draudzene.

$2x + 64$... tik santīmu samaksāja otra draudzene.

$3x + 46 = 2x + 64$... jo draudzenes iztērēja vienādu naudas summu.

$$3x - 2x = 64 - 46$$

$$x = 18 \text{ (santīmi)}$$

$$3 \cdot 18 + 46 = 54 + 46 = 100$$

$$3 \cdot 18 + 46 = 54 + 46 = 100 \text{ santīmi jeb Ls 1.}$$

$$2 \cdot 18 + 64 = 36 + 64 = 100 \text{ santīmi jeb Ls 1.}$$

Atbilde. Sierīņš maksā 18 santīmus. Katra meitene iztērēja Ls 1.

5. Divu skaitļu summa ir 41. Ja vienu no tiem reizina ar 4, bet otram pieskaita 4, tad skaitļi kļūst vienādi. Aprēķini dotos skaitļus!

Lineāru vienādojumu sistēma



Ja doti **divi vienādojumi** ar **diviem nezināmajiem**, kuriem jāatrod kopīgais atrisinājums, jāveido **vienādojumu sistēma**. To var **atrisināt** ar:

Lineāru vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

→ ievietošanas paņēmieni rīkojas šādi: → no viena vienādojuma izsaka vienu nezināmo → otrajā vienādojumā izteiktā nezināmā vietā ievieto iegūto izteiksmi → atrisina iegūto vienādojumu → atgriežas pie izteiktā nezināmā un aprēķina to → uzraksta atbildi	→ saskaitīšanas paņēmieni rīkojas šādi: → veic darbības, lai vienam mainīgajam būtu pretēji koeficienti → saskaita abus vienādojumus → aprēķina vienu nezināmo → ievieto vienā vienādojumā aprēķināto nezināmo → aprēķina otru nezināmo → uzraksta atbildi	→ grafisko paņēmieni (skat. 9. tematu) rīkojas šādi: → no abiem vienādojumiem izsaka mainīgo y → uzzīmē funkciju grafikus → ja grafiki krustojas, nosaka krustpunkta koordinātas → uzraksta atbildi
--	--	--

- ☑ 4 zīmuļi un 1 klade maksā 80 santīmus, bet 3 zīmuļi un 2 klades maksā 75 santīmus. Cik maksā zīmulis, cik – klade?

Atrisinājums. x ... tik santīmu maksā zīmulis.
 y ... tik santīmu maksā klade.

→ Uzraksta vienādojumu sistēmu →
$$\begin{cases} 4x + y = 80 \\ 3x + 2y = 75 \end{cases}$$

Risinot ar **ievietošanas paņēmieni**, rīkojas šādi:

→ no 1. vienādojuma izsaka y → $y = 80 - 4x$
 → 2. vienādojumā y vietā ievieto iegūto izteiksmi
 → $3x + 2(80 - 4x) = 75$
 → atrisina iegūto vienādojumu → $3x + 160 - 8x = 75$
 $-5x = 75 - 160$
 $-5x = -85$
 $x = -85 : (-5)$
 $x = 17$

- atgriežas pie y un aprēķina izteiksmes vērtību
 → $y = 80 - 4 \cdot 17 + 12 = 68 + 12 = 80$.
 → Lai pārlicinātos, ka uzdevums atrisināts pareizi, izpilda pārbaudi.

Pārbaude.
$$\begin{cases} 4 \cdot 17 + 12 = 68 + 12 = 80 \\ 3 \cdot 17 + 2 \cdot 12 = 51 + 24 = 75 \end{cases}$$

Atbilde.

Zīmulis maksā 17 santīmus, bet klade maksā 12 santīmus.



Ja vienādojumu sistēmā viena mainīgā koeficienti ir **pretēji skaitļi** vai viegli tos iegūt, tad izmanto **saskaitīšanas paņēmieni**.

6. Atrisini 5. uzdevumu, izmantojot vienādojumu sistēmu!

☒ Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x - 4y = -36 \end{cases}!$

Risinot ar **saskaitīšanas paņēmieni**, rīkojas šādi:

→ veic darbības, lai vienam mainīgajam būtu pretēji koeficienti

→ pareizina 1. vienādojuma abas puses ar 2, lai iegūtu $4y$.

$$\begin{array}{rcl} \rightarrow \text{saskaita abus vienādojumus} & \rightarrow & \begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ 7x - 4y = -36 \end{cases} \\ & & \hline & & 6x + 7x + 4y - 4y = 10 - 36 \\ & & 13x = -26 \end{array}$$

→ abas vienādojuma puses dala ar 13 $\rightarrow x = -26 : 13$

→ aprēķina nezināmo x $\rightarrow x = -2$

→ ievieto 1. vienādojumā aprēķināto nezināmo $x \rightarrow 3 \cdot (-2) + 2y = 5$

→ aprēķina nezināmo y $\rightarrow -6 + 2y = 5$

$$2y = 5 + 6$$

$$2y = 11$$

$$y = 11 : 2$$

$$y = 5,5$$

Atbilde. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5,5 \end{cases}$

7. Divu skaitļu summa ir 30, bet šo skaitļu starpība ir 4. Aprēķini abus skaitļus!

8. Motorlaivas ātrums pa straumi ir 23 km/h, bet pret straumi ir 15 km/h. Aprēķini straumes ātrumu un motorlaivas ātrumu stāvošā ūdenī!

9. Kurš no dotajiem skaitļu pāriem ir vienādojumu sistēmas

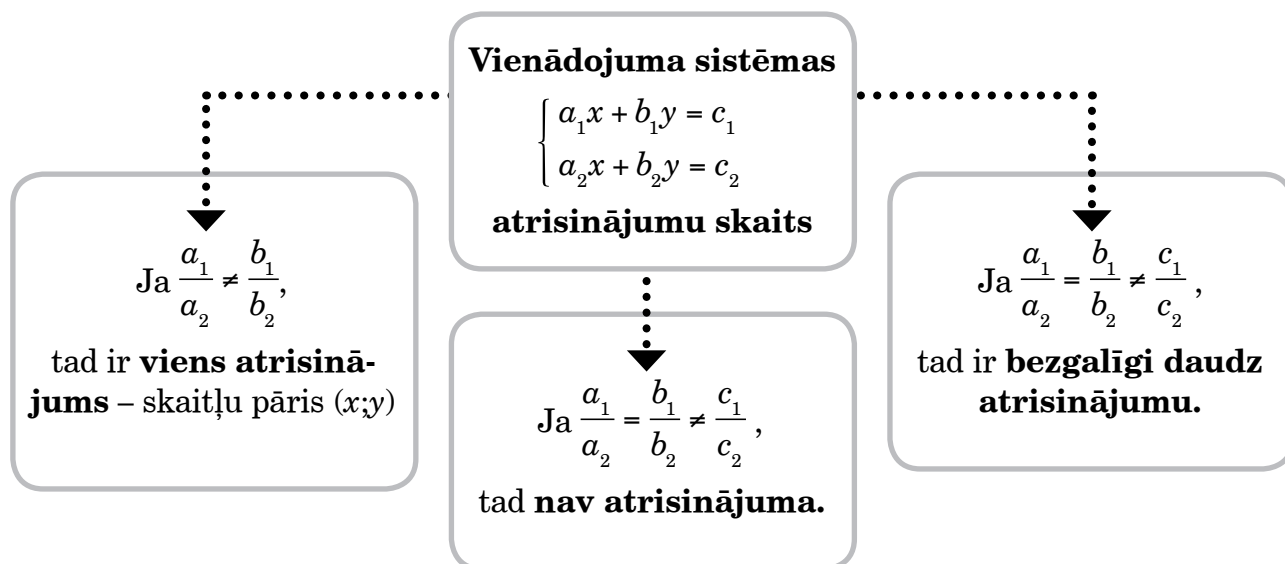
$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x + 3y = 29 \end{cases} \text{ atrisinājums?}$$

a) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$



- ☑ Vienādojumu sistēmai $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 6y = 10 \end{cases}$ ir viens atrisinājums, jo $\frac{1}{3} \neq \frac{-2}{6}$
- ☑ Vienādojumu sistēmai $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 10 \end{cases}$ nav viens atrisinājuma, jo $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{5}{10}$
- ☑ Vienādojumu sistēmai $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ ir viens atrisinājums, jo $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$

10. Noskaidro, cik atrisinājumu ir lineāro vienādojumu sistēmai!

- a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 5y - 5x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x + 7y = 14 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

11. Izvēlies izdevīgāko paņēmieni un atrisini vienādojumu sistēmu!

- a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3y - x = 1 \\ 5y + x = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

12. Ābols maksā 6 santīmus, bumbieris maksā 8 santīmus. Māte nopirka ābolus un bumbierus. Par pirkumu viņa samaksāja 96 santīmus. Cik ābolu un cik bumbieru māte nopirka? Pārbaudi, vai dotās atbildes pareizas!

Papildini uzdevumu ar nosacījumu, lai tam būtu viena atbilde!

Āboli	8	4	12	10
Bumbieri	6	9	3	4

13. Divu skolu skolēnu skaita attiecība ir 5 : 3. Cik skolēnu ir katrā skolā, ja vienā skolā ir par 124 skolēniem vairāk nekā otrā?

14. Makā ir 20 santīmu un 10 santīmu monētas, kopā 3 lati. Cik katra veida monētu ir makā, ja kopā ir 21 monēta?

15. Māte nopirka zemenes. Ja katram ģimenes loceklim dotu pa 11 zemenēm, tad vienas ogas nepietiktu. Ja katram iedotu pa 8 ogām, tad 17 ogas paliktu pāri. Cik cilvēku ir ģimenē?

16. Attālums starp Rīgu un Daugavpili ir 240 km. Velosipēdists šo ceļu var veikt 12 stundās, bet motociklistam jābrauc tikai 4 stundas. Abi braucēji vienlaikus izbrauc no šīm pilsētām viens otram pretim. Pēc cik ilga laika viņi satiksies? Cik km būs nobraucis katrs no viņiem?

Pašpārbaude

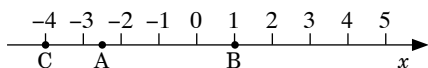
Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1.** Vai skaitlis 5 ir vienādojuma $x - 3 = 2$ sakne?
- (1 p.) 2.** Cik atrisinājumu ir vienādojumam $4x + 5x = 9x$?
- (1 p.) 3.** Vienādojumu $2x + 1 = 0$ sauc par vienādojumu.
- (2 p.) 4.** Atrisini vienādojumu $7x - 21 = 14$!
- (2 p.) 5.** Apzīmē nezināmo lielumu ar x un uzraksti uzdevuma nosacījumiem atbilstošu vienādojumu: „Divi draugi kopā izmakšķerēja 18 zivis. Cik zivju izmakšķerēja katrs, ja viens noķēra 2 reizes vairāk zivju nekā otrs?”
- (2 p.) 6.** Divu skaitļu starpība ir 5, bet summa ir 25. Aprēķini šos skaitļus!
- (2 p.) 7.** Cik atrisinājumu ir vienādojumu sistēmai
$$\begin{cases} 3y + x = 1 \\ 5y + 4x = 3 \end{cases} \quad ?$$
- (3 p.) 8.** Atrisini vienādojumu sistēmu
$$\begin{cases} y - x = 1 \\ 5y + 4x = 23 \end{cases} \quad !$$
- (3 p.) 9.** Attālums starp divām pilsētām ir 380 km. Vienlaicīgi no abām pilsētām viens otram pretī izbrauca divi autobusi. Vienam no tiem vidējais ātrums bija par 10 km/h lielāks nekā otram. Līdz satikšanās brīdim autobuss ar lielāko ātrumu brauca 2 stundas, bet otrs autobuss brauca 3 stundas. Aprēķini katra autobusu ātrumu!
- (3 p.) 10.** $2,3x + 2,34y = 27,68$. Nosaki x un y vērtības, ja tie ir naturāli skaitļi!

7. Koordinātu plakne.

Funkcija un ar to saistītie jēdzieni

Taisne, uz kuras atzīmēta nulle, izvēlēts vienības nogrieznis (attālums starp 0 un 1) un norādīts virziens, ir **koordinātu taisne**.



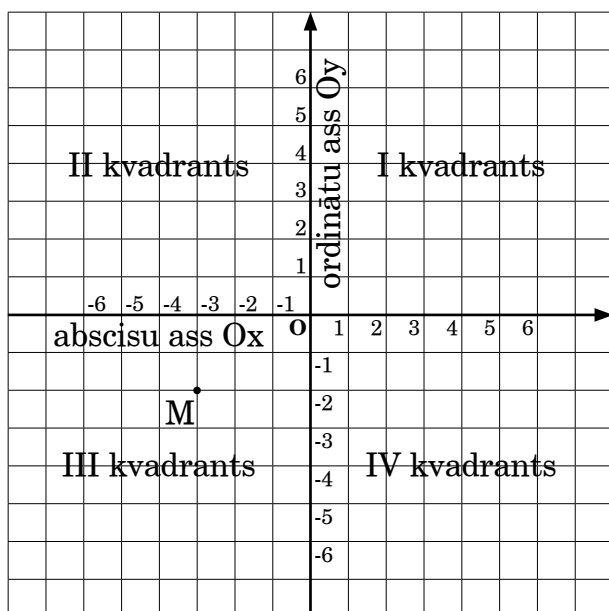
Uz koordinātu taisnes var atzīmēt punktus un pierakstīt to koordinātas – skaitļus, kas atbilst dotajiem punktiem. Zīmējumā $A(-2,5)$, $B(1)$, $C(-4)$.

Bultiņa uz koordinātu taisnes norāda virzienu, kurā pieaug punktu koordinātas. Jo vairāk pa labi atrodas punkts, jo lielāka tā koordināta.

Plaknē novelk divas savstarpēji perpendikulāras koordinātu taisnes ar kopējo sākumpunktu O . Tās veido **koordinātu plakni**.

Horizontālā ass, kas vērsta no kreisās puses uz labo, ir **abscisu** jeb **Ox ass**. Vertikālā ass, kas vērsta uz augšu, ir **ordinātu** jeb **Oy ass**.

Koordinātu ass sadala koordinātu plakni četrās daļās – **kvadrantos**.



Zīmes kvadrantos:

	x	y
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Punkta M **koordinātas** uz Ox ass ir -3 un uz Oy ass ir -2 . To pieraksta šādi: $M(-3; -2)$.

Skaitlis $x = -3$ ir punkta M **abscisa**, bet skaitlis $y = -2$ ir punkta M **ordināta**.

1. Koordinātu plaknē uzzīmē lauztu līniju ABCDE, kuras punktu koordinātas ir A (−2; 1), B (0; −1), C (2; 1), D (4; −1), E (5; 2)! Ieraksti tabulā atbilstošo punktu ordinātas, izmantojot grafiku!

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	1							

Cik uz lauztās līnijas ir tādu punktu, kuru ordināta ir 0? Apzīmē tos ar lielajiem burtiem F, G utt. Vai punkti V(−1; 0), Z(1; 2), T(0; 3) pieder lauztai līnijai?

- ☒ Ikdienā bieži sastopamies ar lielumiem, kas ir savstarpēji saistīti. Tabulā atspoguļoti daži savstarpēji saistītu lielumu piemēri.

Konstants lielums	Mainīgs lielums	Izteiksme
Velosipēdista ātrums ir 9 km/h	Nobrauktais laiks ir t h	Nobrauktais attālums S = 9 · t(km)
Piena pakas cena ir 0,48 Ls	Nopirkto paku skaits ir x gab.	Pirkuma cena C = 0,48 · x(Ls)
Kvadrātam ir 4 vienādas malas	Malas garums ir a cm	Kvadrāta perimetrs P = 4 · a(cm)
Taisnstūra garums ir 3 dm	Taisnstūra platums ir z dm	Taisnstūra laukums S = 3 · z(dm²)

Mainīgie lielumi, kuri atrodas tabulas otrajā kolonnā, ir **neatkarīgie lielumi** jeb **neatkarīgie mainīgie**. Tie var mainīties atkarībā no nosacījumiem. Izteiksmju vērtības, kas atrodas trešajā kolonnā, ir atkarīgas no neatkarīgā mainīgā vērtības. Tie ir **atkarīgie lielumi** vai **atkarīgie mainīgie**.

- ☒ Velosipēdists ceļo pa Latviju, braucot ar vienmērīgu ātrumu 9km/h. Viņa maršruts sadalīts četros posmos. Pirmo posmu velosipēdists nobrauca 1h, otro – 2h, trešo – 1,5h, ceturto – 3h. Izveido tabulu, kur pirmajā ailē ierakstīts laiks, bet otrajā – tam atbilstošais ceļš.

Laiks t(h)	1h	2h	1,5h	3h
Nobrauktais attālums s(km)	9 · 1=9(km)	9 · 2=18(km)	9 · 1,5=13,5(km)	9 · 3=27(km)

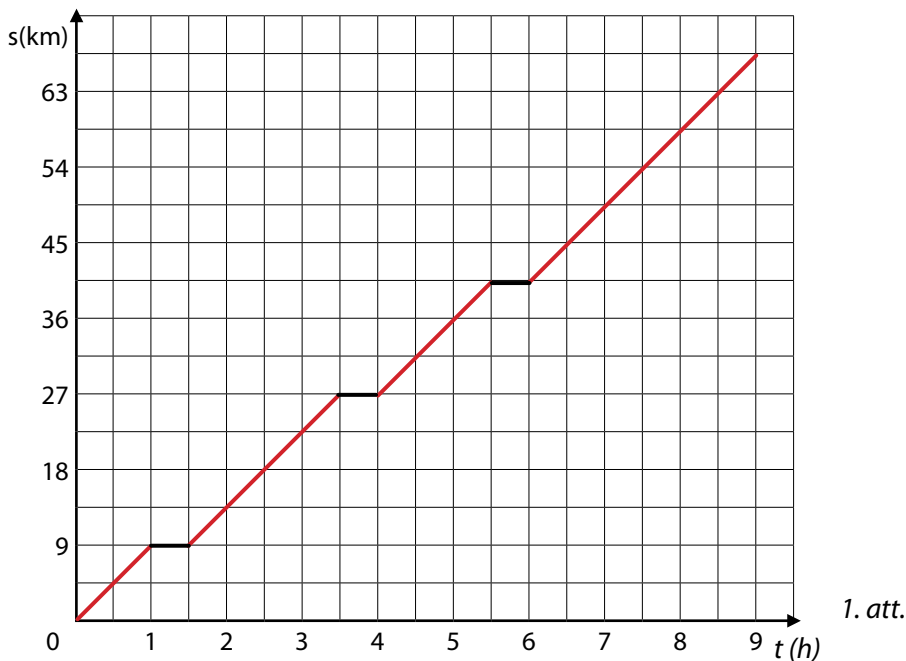
Velosipēdista braukšanas laiks ir neatkarīgs lielums, taču nobrauktais attālums ir atkarīgs no braukšanas laika. Ja velosipēdista ātrums ir 9km/h, tad 2 stundās viņš nobrauks $9 \cdot 2 = 18$ km Tātad dotajam laikam t atbilst viens vienīgais attālums s .



Funkcija ir viena mainīgā atkarība no otrā mainīgā, ja katrai neatkarīgā mainīgā vērtībai atbilst ne vairāk kā viena atkarīgā mainīgā vērtība.

Funkciju var uzdot četros veidos:

vārdiski, ar **formulu**, ar **tabulu**, ar **grafiku**.



☒ Velosipēdists pēc katra maršruta posma, izņemot pēdējo, atpūšas pusstundu. Velosipēdista kustības grafiku var attēlot koordinātu plaknē šādi (1. att.):

- ➔ zīmē horizontālo asi, izvēlas vienības nogriezni uz tās → horizontālā ass ir laiks (t). Vienības nogrieznis uz tās ir 1 stunda
- ➔ zīmē vertikālo asi, izvēlas vienības nogriezni uz tās → vertikālā ass ir attālums (s). Vienības nogrieznis uz tās ir 9 km
- ➔ pārbauda, kādos kvadrantos atrodas grafiks → grafiks atrodas I kvadrantā, jo $t > 0$, $s > 0$
- ➔ tabulā dotos datus atliek kā punktus koordinātu plaknē.

Uz dotā grafika ar melno līniju atzīmēti posmi, kad velosipēdists brauc, ar sarkano – kad viņš atpūšas.

No grafika var nolasīt, ka velosipēdists ceļā pavadīja 9 stundas un nobraucis 67,5 km.

2. Nolasi no grafika (skat. 1. att.), cik tālu ir aizbraucis velosipēdists pēc 5 stundām un cik stundās viņš nobrauca 54 km!

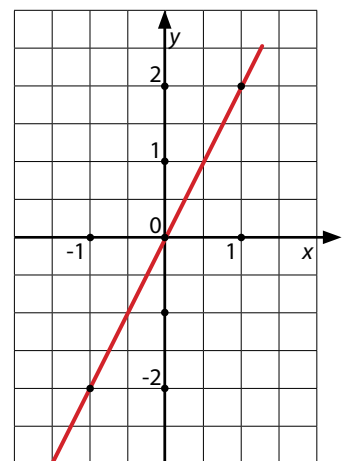
☒ Lai konstruētu funkcijas $y = 2x$ grafiku (skat. 2. att.),

- ➔ izveido vērtību tabulu, kurā ieraksta dažas x vērtības un aprēķina tām atbilstošās y vērtības

x	-2	-1	0	1
y	-4	-2	0	2

- ➔ uzzīmē koordinātu plakni, izvēlas vienības nogriezni
- ➔ koordinātu plaknē atliek punktus no tabulas un savieno tos (skat. 2. att.)

2. att.



3. Sastādi vērtību tabulu un konstruē funkciju grafikus!

a) $y = 3x$ b) $y = -x + 4$ c) $y = \frac{1}{2}x + 3$ d) $y = \frac{-2x + 6}{4}$



Punkts pieder funkcijas grafikam, ja abas tā koordinātas ievieto funkcijas izteiksmē un iegūst pareizu identitāti.

☒ Lai noskaidrotu, vai punkts $M(2; 5)$ pieder funkcijas $f(x) = 2x + 1$ grafikam, rīkojas šādi:

→ $x = 2$ un $y = 5$ ievieto funkcijas izteiksmē

→ $5 = 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow 5 = 5$

Tā kā iegūta patiesa vienādība, punkta M koordinātas apmierina funkcijas izteiksmi, tad tas pieder funkcijas grafikam.

☒ Punkts $F(9; 4)$ nepieder funkcijas $f(x) = \sqrt{x}$ grafikam

→ $4 \neq \sqrt{9}, 4 \neq 3.$

☒ Lai noteiktu skaitļa y vērtību, ja punkts $N(-2; y)$ pieder funkcijas $f(x) = \frac{1}{x}$ grafikam, rīkojas šādi:

→ nosaka punkta $N(-2; y)$ zināmo koordinātu

→ $x = -2$

→ aprēķina punkta nezināmo koordinātu

→ $x = -2$ ievieto izteiksmē $f(x) = \frac{1}{x}$
 $y = f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

→ punkta N koordinātas ir $(-2; -\frac{1}{2})$.

☒ Lai noteiktu skaitļa x vērtību, ja punkts $P(x; 4)$ pieder funkcijas $f(x) = 2x + 1$ grafikam, rīkojas šādi:

→ nosaka punkta $P(x; 4)$ zināmo koordinātu

→ $y = 4$

→ aprēķina punkta nezināmo koordinātu

→ $y = f(x) = 4$ ievieto izteiksmē $f(x) = 2x + 1$
 $4 = 2x + 1$ – lineārs vienādojums,

kurš jāatrisina $-2x = 1 - 4$

$-2x = -3$

$x = -3 : (-2)$

$x = 1,5$

→ punkta P koordinātas ir $(1,5; 4)$.

4. Dota funkcija $f(x) = \frac{2}{x-4}$. Nosaki punkta nezināmo koordinātu, ja tas pieder funkcijas grafikam:

a) $A(2; y)$ b) $C(-4; y)$ c) $B(x; 8)$ d) $D(x; \frac{1}{4})$

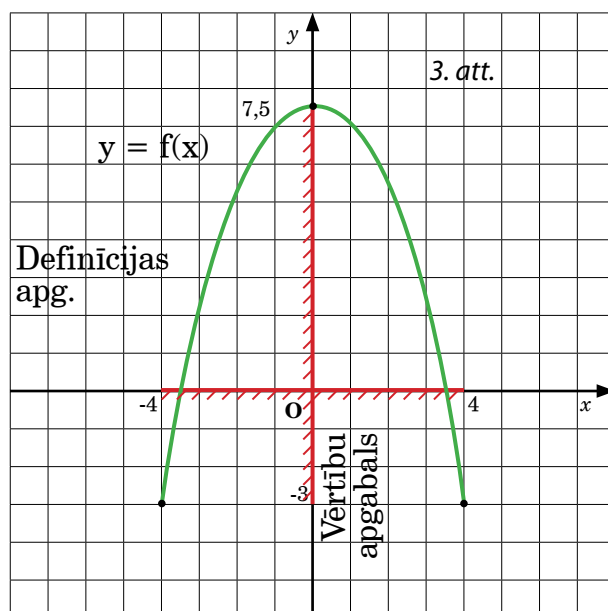


Funkcijas $y = f(x)$ **definīcijas apgabals** ir visas neatkarīgā mainīgā x vērtības, ar kurām izteiksmei $f(x)$ ir jēga. Definīcijas apgabalu apzīmē šādi: **$D(f)$** .

Lai noteiktu funkcijas definīcijas apgabalu, rīkojas šādi:

- ➔ izpēta funkcijas izteiksmi – nosaka, kādām x vērtībām tā ir definēta.

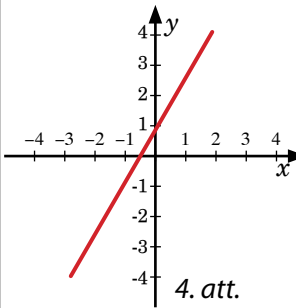
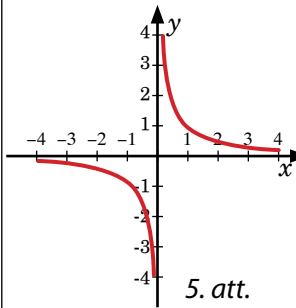
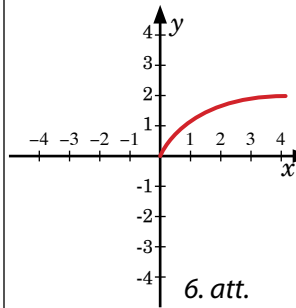
Funkcijas $y = f(x)$ **vērtību apgabals** ir visas atkarīgā mainīgā y vērtības. Vērtību apgabalu apzīmē šādi: $E(f)$.



Definīcijas un vērtību apgabalus var nolasīt no funkcijas grafika.

☒ 3. attēlā attēlotajai funkcijai

$$D(f) = [-4; 4] \text{ un } E(f) = [-3; 7,5]$$

Funkcija	☑ $y = 2x + 1$	☑ $y = \frac{1}{x}$	☑ $y = \sqrt{x}$
Funkcijas izteiksme	izteiksme $2x + 1$ definēta jebkurai x vērtībai	izteiksme $\frac{1}{x}$ definēta jebkurai x vērtībai, izņemot $x = 0$	izteiksme $\sqrt{x}$ definēta jebkurai nenegatīvai x vērtībai ($x \geq 0$)
Funkcijas definīcijas apgabals	$D(f) = (-\infty; +\infty)$ vai $D(f) = R$	$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ vai $x \neq 0$	$D(f) = (0; +\infty)$ vai $x \geq 0$
Funkcijas grafiks			
Funkcijas vērtību apgabals	$E(f) = (-\infty; +\infty)$ vai $E(f) = R$	$E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ vai $y \neq 0$	$E(f) = [0; +\infty)$ vai $y \geq 0$

5. Sastādi vērtību tabulu un konstruē funkciju grafikus! Nosaki funkciju definīcijas un vērtību apgabalus!

a) $y = 2x - 5$ b) $y = x^2 + 1$ c) $y = x^3$ d) $y = \sqrt{x} + 1$



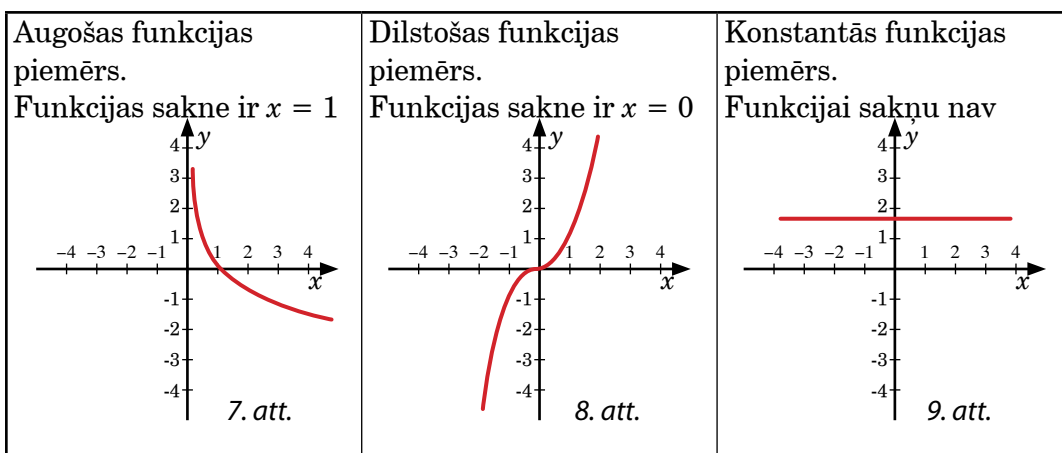
Funkcija ir **augoša**, ja, palielinoties x vērtībai, palielinās y vērtība. (skat. 8. att.)

Funkcija ir **dilstoša**, ja, palielinoties x vērtībai, samazinās y vērtība. (skat. 7. att.)

Funkcija ir **konstanta**, ja, palielinoties x vērtībai, y vērtība nemainās. (skat. 9. att.)

Funkcijas saknes jeb **funkcijas nulles** ir funkcijas grafika krustpunkti ar x asi. (skat. 7., 8. att.)

☒ Funkcijai var nebūt sakņu (skat. 9. att.) vai var būt vairākas saknes.



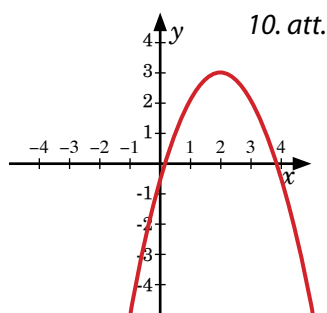
Funkcijas lielākā vērtība ir lielākā iespējamā mainīgā y vērtība. Tas ir **funkcijas maksimums** (skat. 10. att.).

Grafikā funkcijas lielākā vērtība ir visaugstākais punkts, ko tas sasniedz uz y ass.

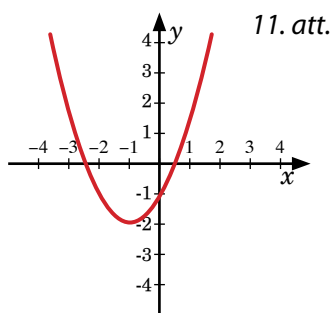


Funkcijas mazākā vērtība ir mazākā iespējamā y mainīgā vērtība. Tas ir **funkcijas minimums** (skat. 11. att.).

Grafikā funkcijas mazākā vērtība ir viszemākais punkts, ko tas sasniedz uz y ass.

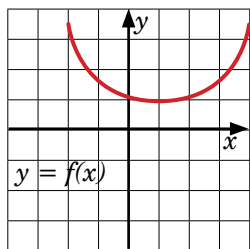


Funkcijas lielākā vērtība $y = 3$, ja $x = 2$. To raksta šādi: $y_{\max} = 3$.
Mazākās vērtības funkcijai nav.

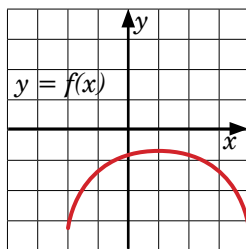


Funkcijas mazākā vērtība ir $y = -2$, ja $x = -1$. To raksta šādi: $y_{\min} = -2$.
Lielākās vērtības funkcijai nav.

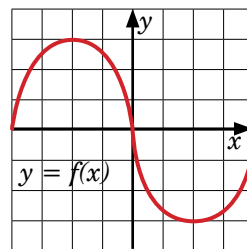
Funkcija ir **pozitīva** ($y > 0$), ja viss tās grafiks atrodas virs Ox ass.
Funkcija ir **negatīva** ($y < 0$), ja viss tās grafiks atrodas zem Ox ass.



Funkcija $y = f(x)$ ir pozitīva t.i., $y > 0$, ja $x \in (-\infty ; +\infty)$



Funkcija $y = f(x)$ ir negatīva t.i., $y < 0$, ja $x \in (-\infty ; +\infty)$



Funkcija mainās intervālos:
 $y > 0$, ja $x \in (-4; 0)$ (funkcija ir pozitīva)
 $y < 0$, ja $x \in (0; 4)$ (funkcija ir negatīva)

6. Nosaki sakarību starp x un y ! Aizpildi tabulu! Uzraksti funkcijas izteiksmi!

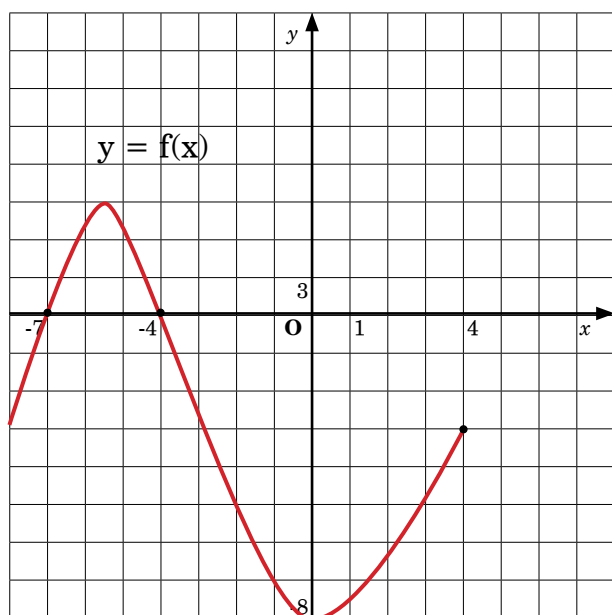
x	1	-1	0			-1,5
y	2	-2		-4	$1\frac{1}{3}$	

Konstruē funkcijas grafiku! Izpēti funkcijas īpašības!

7. Atkārto jēdzienus, kas ir saistīti ar funkcijām! Papildini teikumus!

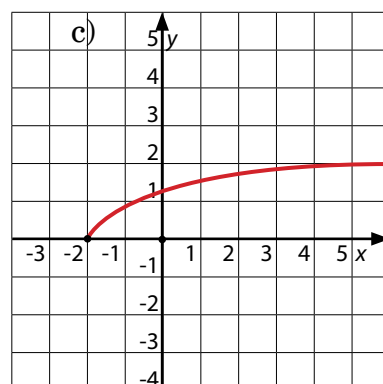
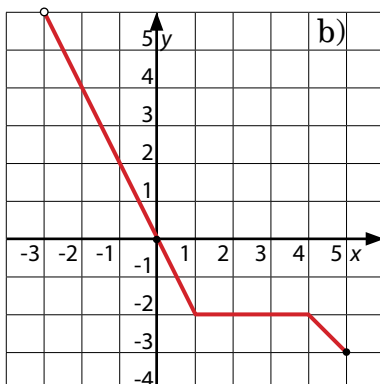
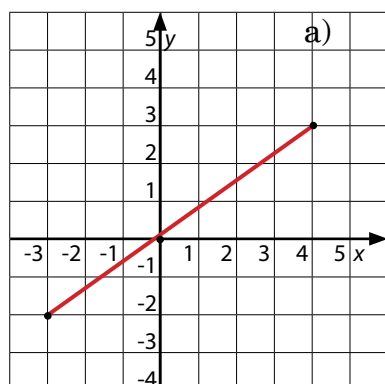
1. Koordinātu plakni veido divas _____, kas ir savstarpēji _____.
2. Horizontālo koordinātu asi sauc par _____, bet _____ koordinātu asi sauc par ordinātu jeb Oy asi.
3. Koordinātu asis plakni sadala četros _____.
4. Skaitļus -3 un 8 sauc par punkta $A(-3; 8)$ _____.

5. Punkts $D(0; 100)$ atrodas uz _____ ass.
6. _____ x sauc par funkcijas _____.
7. Atkarīgo mainīgo _____ sauc par funkcijas _____.
8. _____ apzīmē ar $D(f)$.
9. Funkcijas _____ ir funkcijas vismazākā vērtība.
- ☒ Izmantojot funkcijas grafiku, izpēti tās īpašības!



- 1) Funkcijas definīcijas apgabals ir $D(f) = [-8; 4]$
- 2) Funkcijas vērtību apgabals ir $E(f) = [-8; 3]$
- 3) Ja $x \in [-8; -5,5) \cup (0; 4]$, tad funkcija aug; ja $x \in (-5,5; 0)$, tad funkcija dilst
- 4) Funkcijas saknes ir $x_1 = -7$ un $x_2 = -4$
- 5) Funkcijas vislielākā vērtība ir $y = 3$, ja $x = -5,5$, t.i., $y_{\max} = 3$
- 6) Funkcijas mazākā vērtība ir $y = -8$, ja $x = 0$, t. i., $y_{\min} = -8$
- 7) $y > 0$, ja $x \in (-7; -4)$
- 8) $y < 0$, ja $x \in [-8; -7) \cup (-4; 4]$

8. Izpēti funkcijas, izmantojot dotos grafikus!



Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Kurā kvadrantā atrodas punkts $D(-3; 4)$?
- (2 p.) 2. Koordinātu plaknē atzīmē punktus $P(-3; 2)$, $R(1; 2)$, $S(1; -1)$, $T(-3; -1)$! Savieno tos ar nogriežņiem! Kā sauc iegūto figūru? Aprēķini tās perimetru!

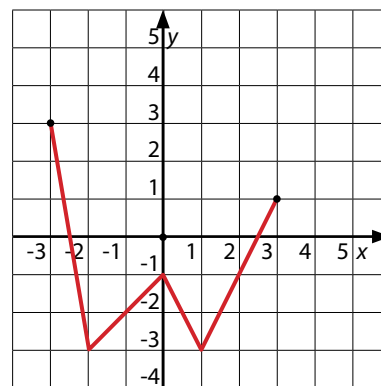
(3 p.) 3. Grāmatas cena 1,20 Ls/gab. Izsaki pirkuma cenu, ja nopirkta x grāmatas un vēl dāvanu maisiņš par 0,65 Ls! Atrodi iegūtās funkcijas vērtību, ja $x = 3; 5; 10$!

(2 p.) 4. Kādai jābūt y vērtībai, lai punkts $A(2; y)$ piederētu funkcijas $y = 2x - 5$ grafikam?

(3 p.) 5. Kādai jābūt y vērtībai, lai punkts $B(x; 2)$ piederētu funkcijas $y = 2x + 5$ grafikam?

(6 p.) Pēc funkcijas grafika nosaki:

- a) funkcijas definīcijas apgabalu,
- b) funkcijas vērtību apgabalu,
- c) funkcijas saknes,
- d) intervālus, kuros funkcija ir augoša,
- e) intervālus, kuros funkcija ir negatīva,
- f) funkcijas lielāko vērtību!



(3 p.) 7. Izdomā un uzzīmē funkcijas grafiku, ja $D(f) = [-5; 4]$, $E(f) = [-3; 6]$, funkcijas sakne $x = 1$!

8. Lineārā nevienādība.

Lineāro nevienādību sistēma

- ☒ Kurš monitors lielāks, ja M_1 izmērs pa diagonāli ir 48,64cm, bet M_2 izmērs pa diagonāli ir 21 colla? (1colla = 2,54cm)

Atrisinājums. $21 \cdot 2,54 = 53,34$ (cm). $53,34 > 48,64$. Tātad $M_2 > M_1$.

Atbilde. Monitors M_2 ir lielāks nekā monitors M_1 .



Vienādības un nevienādības simboli:

= (vienāds), > (lielāks),
< (mazāks),
≥ (lielāks vai vienāds jeb ne mazāks),
≤ (mazāks vai vienāds jeb ne lielāks)

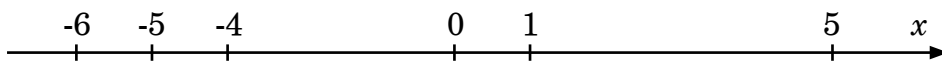
Ikdienā bieži jāprot salīdzināt, *piemēram*,

- ☑ trolejbusa pietura ir tuvāk nekā tramvaja pietura,
- ☑ šodien ārā ir siltāks nekā vakar,
- ☑ es eju ātrāk nekā tu utt.

Īsāk to visu pieraksta ar nevienādību **simboliem**.

Skaitliska nevienādība

Ja divus skaitļus vai skaitliskas izteiksmes savieno ar nevienādības zīmi, rodas **skaitliska nevienādība**. Ar zīmēm < un > veido **stingrās nevienādības**, ar zīmēm ≤ un ≥ veido **nestingrās nevienādības**. Par **skaitlisku nevienādību** var pateikt, vai tā ir **patiesa** vai **aplama**.



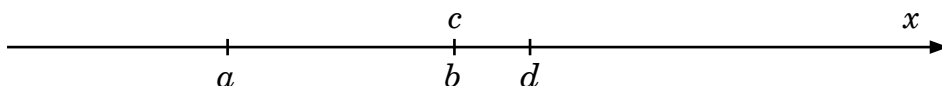
- ☑ $1 < 5$; $-5 > -6$ un $8, 0 \geq -1$ ir patiesas nevienādības, bet $-4 < -6$ un $5 \leq 1$ ir aplamas.

1. Nosaki, vai skaitliskā nevienādība ir patiesa vai aplama!

- a) $2,7 < 7,2$ b) $-6,4 > -4,6$ c) $9,34 \leq 9,340$
d) $-1,23 \geq 0$ e) $0,1 < -10$

Lasot nevienādību no kreisās uz labo pusi vai otrādi, tās patiesums nemainās.

Patiesas nevienādības ir $a < b$, $a \leq c$, $b \geq a$, $c \leq b$ jeb $b \geq c$ un $b = c$, $c < d$, $a \leq b \leq d$ u.c. (skat. att.)



2. Savieto tabulas 1. kolonnas nevienādības ar atbilstošo apgalvojumu 2. kolonnā!

Uzraksti nevienādību un tai atbilstošo apgalvojumu!

$a \leq 30$	1) skaitlis ir mazāks vai vienāds ar pieci
$c \geq 0$	2) skaitlis nav lielāks par trīsdesmit
$d < -1$	3) skaitlis nav mazāks nekā septiņi simti četrdesmit trīs
$b \leq 5$	4) skaitlis ir mazāks nekā mīnus viens
$e \geq 743$	5) skaitlis ir vismaz pieci
$f \geq 5$	6) skaitlis ir nenegatīvs

3. Uzraksti apgalvojumus kā nevienādības, izmantojot zīmes $=$; $<$; $>$; $\leq$; $\geq$!

- Automašīnas ātrums (v), braucot apdzīvotā vietā, nedrīkst pārsniegt 50 km/h.
- Mācību stundas ilgums (s) ir 40 min.
- Ezera dziļums (g) ir lielāks nekā 12 metri.
- Kastes masa (m) ir vismaz 10 kg.
- Ceļa platums (p) ir ne lielāks kā 8 metri.
- Koka augstums (h) ir mazāks nekā 20 m.

Skaitliskas nevienādības īpašības – ekvivalenti pārveidojumi

Ja **patiesas nevienādības** abām pusēm **pieskaita** vai no tām atņem vienu un to pašu **skaitli**, tad **iegūst patiesu nevienādību**.

Ja $a > b$, tad $a + c > b + c$.



☒ Ja $5 > 1$, tad $5 + 2 > 1 + 2$ jeb $7 > 3$.

☒ Ja $-4 < 0$, tad $-4 - 1 < 0 - 1$ jeb $-5 < -1$.

Ja **patiesas nevienādības** abas puses **reizina** vai dala ar vienu un to pašu **pozitīvu skaitli**, tad **iegūst patiesu nevienādību**.

Ja $a < b$ un $c > 0$ (**c ir pozitīvs**), tad $a \cdot c < b \cdot c$.



☒ Ja $-5 < 1$, tad $-5 \cdot 2 < 1 \cdot 2$ jeb $-10 < 2$

☒ Ja $1 \geq 0$, tad $1 \cdot 3 \geq 0 \cdot 3$ jeb $3 \geq 0$.



Ja **patiesas nevienādības** abas puses **reizina** vai dala ar vienu un to pašu **negatīvu skaitli**, tad **nevienādības zīmi maina uz pretējo** un **iegūst patiesu nevienādību**.

Ja $a < b$ un $c < 0$ (**c ir negatīvs**), tad $a \cdot c > b \cdot c$.

☑ Ja $0,5 < 1,3$, tad $0,5 \cdot (-2) > 1,3 \cdot (-2)$ jeb $-1 > -2,6$.

☑ Ja $-2 \geq -4$, tad $-2 \cdot (-3) \leq -4 \cdot (-3)$ jeb $6 \leq 12$.



Ja $A < B$ un $\begin{cases} k > 0 \\ k < 0 \end{cases}$ tad $\begin{cases} A \cdot k > B \cdot k \\ A \cdot k < B \cdot k \end{cases}$

4. Izmantojot skaitliskas nevienādības īpašības, uzraksti nevienādību, ko iegūst, ja nevienādības $30 > -3$

- a) abām pusēm pieskaita skaitli 7 c) abas puses reizina ar (-2)
b) no abām pusēm atņem skaitli 9 d) abas puses dala ar 5

Nosacītā nevienādība



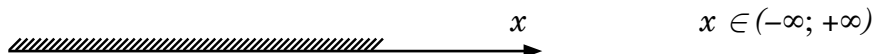
Nevienādība, kurā ar x apzīmēts nezināmais (**mainīgais**), ir **nosacītā nevienādība**, piemēram, $2x < 7$; $-3x + 1 \geq x - 2$.

Nosacīto nevienādību patiesums atkarīgs no **mainīgā** (x) skaitliskās vērtības.

☑ Nosacītā nevienādība $2x - 5 > 1$ ir patiesa, ja $x = 10$, jo skaitliska nevienādība $2 \cdot 10 - 5 > 1$ jeb $15 > 1$ ir patiesa. Nevienādība ir aplama, ja $x = 2$, jo skaitliska nevienādība $2 \cdot 2 - 5 > 1$ jeb $-1 > 1$ ir aplama.

☑ Nosacītā nevienādība $0x > -1$ ir patiesa ar jebkuru x vērtību, jo, nulli reizinot ar jebkuru skaitli, iegūst nulli un $0 > -1$ ir patiesa skaitliska nevienādība.

To attēlo uz skaitļu ass šādi:



5. Dota patiesa nevienādība. Salīdzini mainīgo x ar 0!

- a) $7x \leq 17x$ b) $3x < 4x$ c) $-2x > -5x$ d) $6x + 8 < 2x + 8$

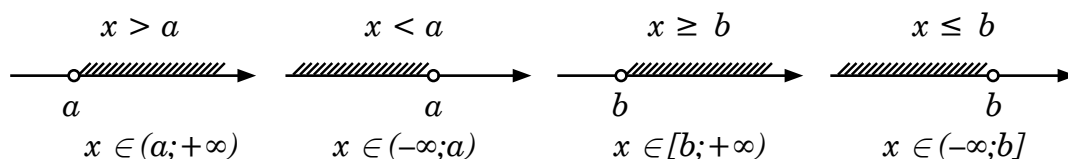
Atrisināt nosacīto nevienādību nozīmē **atrast visas tās mainīgā vērtības**, ar kurām dotā nevienādība kļūst par **patiesu skaitlisku nevienādību**, vai pamatot, ka tādu vērtību nav.



Nosacītajām nevienādībām parasti ir **bezgalīgi daudz atrisinājumu**, kurus var **attēlot uz skaitļu ass un pierakstīt ar skaitļu intervālu**.

Neiekrāsotu punktu uz skaitļu ass atliek kā $\circ$, ja ir stingrās nevienādības ($<$ vai $>$).

Iekrāsotu punktu atliek kā $\bullet$, ja ir nestingrās nevienādības ($\leq$ vai $\geq$).



6. Attēlo nevienādības atrisinājumu uz skaitļu ass un nosauc divus skaitļus, vienu – kas der un otru – kas neder par dotās nevienādības atrisinājumu!

a) $a \geq 9$

b) $b \leq 10$

c) $c < 0$

d) $0 \cdot d > -5$

e) $0 \cdot e \leq -1$

f) $-0,5x \geq 0$

Lineārā nevienādība

Lineārā nevienādība ir nevienādība, kura dota vai to var pārveidot formā $ax > b$ vai arī $ax < b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$, kur **a un b ir skaitļi**, bet **x ir mainīgais**.



Divas vai vairākas nevienādības ir **ekvivalentas**, ja tām ir **vienādas atrisinājumu kopas**.

Risinot nevienādības, drīkst veikt tikai **ekvivalentus pārveidojumus**. Tas nozīmē doto nevienādību pārveidot par vienkāršāku, izmantojot iepriekš apskatītās **nevienādību īpašības**.

☑ Nevienādības $2x < 6$ un $x < 3$ ir ekvivalentas, jo tām ir vienādi atrisinājumi $x < 3$ un $x < 3$ un atrisinājumu kopas $\rightarrow x \in (-\infty; 3)$.

☑ Nevienādības $x + \frac{3}{x-1} < 9 + \frac{3}{x-1}$ un $x < 9$ nav ekvivalentas, jo skaitlis 1 ir otrās nevienādības atrisinājums, bet nav pirmās nevienādības atrisinājums, jo dalīt ar 0 nedrīkst.

7. Noskaidro, kuras dotās nevienādības ir ekvivalentas nevienādībai $x > 5$!

a) $3x > 15$

b) $-3x > -15$

c) $2x + 1 > 11$

d) $4x - 2 \geq x + 13$

e) $-5x < -25$

☒ Atrisināt nevienādības!

- ☑ $0x < 1$ Neatkarīgi no mainīgā vērtības nevienādības kreisā puse ir vienāda ar nulli, bet nulle ir mazāka par viens. Tā ir patiesa skaitliska nevienādība, tāpēc lineārā nevienādība ir patiesa ar jebkuru mainīgā vērtību.

Atbilde.

- ☑ $0x \geq 1,5$ Spriežot līdzīgi kā iepriekšējā piemērā, nulle ir mazāka par 1,5. Tāpēc šai nevienādībai nav atrisinājuma. Saka – atrisinājums ir tukša kopa, to apzīmē ar $\emptyset$.

☑ $x - 6 \leq 5 - 3(x + 2)$

Lai atrisinātu nevienādību, rīkojas šādi:

→ atver iekavas $\rightarrow x - 6 \leq 5 - 3x - 6$

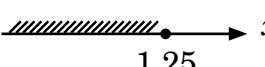
→ pārnēs nezināmos uz nevienādības kreiso pusi, bet skaitļus uz labo pusi,

mainot to zīmes uz pretējām $\rightarrow x + 3x \leq 5 - 6 + 6$

→ savelk līdzīgos saskaitāmos $\rightarrow 4x \leq 5$

→ dala nevienādības abas puses ar 4 $\rightarrow x \leq 5 : 4$
 $x \leq 1,25$

→ nevienādības atrisinājumu attēlo uz skaitļu ass

→  x
1,25

Atbilde. $x \in (-\infty; 1,25]$

☑ $-1,5x < 45$

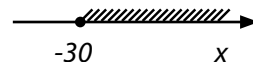
Lai atrisinātu nevienādību, rīkojas šādi:

→ **dalot** nevienādības abas puses **ar negatīvu skaitli**, nevienādības **zīmi maina uz pretējo**

→ $x > 45 : (-1,5)$
 $x > -30$

→ nevienādības atrisinājumu attēlo uz skaitļu ass →

Atbilde. $x \in (-30; +\infty)$



8. Atrisini nevienādības! Atbildi attēlo uz skaitļu ass un uzraksti kā skaitļu intervālu!

a) $6x > 30$

b) $-3x \geq 18$

c) $5(x - 1) < 3x + 2(x + 1)$

d) $x(x - 4) \leq 0,5x(2x - 10) + 4$

e) $3(x + 1) - 2(x + 2) \geq 12 + x$

f) $(x - 1)(x + 1) > (x - 3)(x + 2)$

g) $-0,02x < -20$

- ☑ Kalniņu ģimenē ir 4 cilvēki. Visi nolēma aizbraukt uz kalnu slēpot. Ceļa izdevumi ir Ls 10, slēpošanas inventāra noma katram ir Ls 3,50. Cik latu katrs cilvēks drīkst atļauties tērēt citiem izdevumiem, lai brauciena izmaksas nepārsniegtu Ls 40?

Apzīmējumi. x ... tikATUS citiem izdevumiem drīkst tērēt katrs;
 $4x$... tikATUS citiem izdevumiem drīkst tērēt visi kopā;
 $4 \cdot 3,5 = 14$... tik latu izmaksās slēpošanas inventāra noma;
 $4x + 14 + 10$... tik latu izmaksās brauciens.

Atrisinājums.

- uzraksta nevienādību $\rightarrow 4x + 14 + 10 \leq 40$
 → saskaitāmos, kas nesatur mainīgos, pārnes uz nevienādības labo pusi
 $\rightarrow 4x \leq 40 - 14 - 10$
 → savelk līdzīgos saskaitāmos $\rightarrow 4x \leq 16$
 → nevienādības abas puses izdala ar 4 $\rightarrow x \leq 16 : 4 \rightarrow x \leq 4$

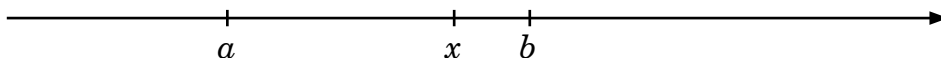
Atbilde. Katrs brauciena dalībnieks citiem izdevumiem drīkst tērēt ne vairāk kā Ls 4.

9. Zemnieku saimniecība atrodas starp Siguldu un Cēsīm. Zemnieks vēlas pārdot izaudzētos kartupeļus. Siguldā viņam piedāvā samaksāt Ls 0,09 par kilogramu, bet Cēsīs – 0,11 Ls/kg. Transporta izdevumi uz Siguldu ir Ls 3,50, bet uz Cēsīm ir Ls 6,50. Cik kg kartupeļu zemniekam jāpārdod, lai izdevīgāks darījums būtu tos pārdot Siguldā?

10. Velosipēdistu grupa izbrauca no Daugavpils uz Krāslavu plkst. 8³⁰. Viņiem jāierodas Krāslavā ne vēlāk kā plkst. 11³⁰. Ar kādu vidējo ātrumu jābrauc velosipēdistiem, ja attālums starp pilsētām ir 48 km?

Nevienādību sistēma, divkārša nevienādība

Ja uz skaitļu ass atlikti divi skaitļi a un b , bet skaitlis x ir starp tiem, tad ir patiesas divas lineāras nevienādības: $a < x$ un $x < b$.

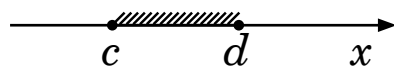


Apgalvojumu, ka mainīgais x vienlaikus apmierina abas nevienādības, var pierakstīt kā
nevienādību sistēmu $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ vai kā **divkāršu nevienādību** $a < x < b$.



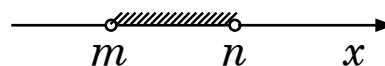
Divkāršās nevienādības un arī nevienādību sistēmas **atrisinājums** ir skaitļu intervāls $(a; b)$. To pieraksta šādi: $x \in (a; b)$.

$$\checkmark c \leq x \leq d \text{ jeb } \begin{cases} x \geq c \\ x \leq d \end{cases}$$



$$x \in [c; d]$$

$$\checkmark m < x < n \text{ jeb } \begin{cases} x < n \\ x > m \end{cases}$$



$$x \in (m; n)$$

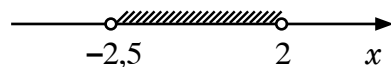
- ☒ Ar kādām mainīgā vērtībām izteiksmes $2x + 1$ vērtība ir lielāka nekā -4 , bet mazāka vai vienāda ar 5 ?

Atrisinājuma 1. veids.

$$-4 < 2x + 1 \leq 5$$

$$-5 < 2x \leq 4$$

$$-2,5 < x \leq 2$$



Atbilde. .

Atrisinājuma 2. veids.

$$\begin{cases} 2x + 1 > -4 \\ 2x + 1 \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x > -5 \\ 2x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -2,5 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



Atbilde. $x \in (-2,5; 2)$

11. Atrisini divkāršo nevienādību!

a) $5 < 3x - 1 < 8$

b) $-3 \leq 7x + 4 \leq 18$

c) $2 < 1 - 5x < 7$

d) $-0,6 \leq -9 - 2x \leq 1,4$



Nevienādību sistēmā var apvienot divas vai vairākas lineārās nevienādības. **Atrisināt nevienādību sistēmu** nozīmē atrast visu nevienādību kopīgos atrisinājumus vai noskaidrot, ka tādu nav, ko pieraksta šādi $\emptyset$.

$$\text{Atrisini nevienādību sistēmu } \begin{cases} x + 3 \geq -5 \\ 12 - 2x > 7 \end{cases} !$$

Atrisinājums.

Lai atrisinātu nevienādību sistēmu, rīkojas šādi:

➔ veic nevienādību ekvivalentus pārveidojumus

$$\rightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ -2x > -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ x < 2,5 \end{cases}$$

→ nevienādību atrisinājumus attēlo uz skaitļu ass



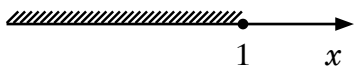
Atbilde. $x \in [-8; 2,5)$.

12. Atrisini nevienādību sistēmu!

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 3 \geq -5 \\ 3x - 2 \leq 7 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4 - 5x < 2(x + 6) \\ 4x + 1 \geq 3 - 5(2x - 7) \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x - 1 < -5 \\ 12 - (x - 7) \leq 42 \end{cases} \end{array}$$

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Vai skaitliskā nevienādība $8 < -4$ ir patiesa?
- (1 p.) 2. Vai skaitlis 15 ir nevienādības $x - 3 > 2$ atrisinājums?
- (1 p.) 3.  Uzraksti nevienādību, kuras atrisinājums ir attēlots zīmējumā!
- (2 p.) 4. Atrisini nevienādību $2x + 6 \geq -8$! Atbilde uzraksti kā skaitļu intervālu!
- (2 p.) 5. Lasis sver 12 kg, bet forele sver 16 mārciņas (1 mārciņa ir aptuveni 0,46 kg). Kura zivs ir smagāka?
- (2 p.) 6. Atrisini nevienādību $2 - 6x \geq x - 1$! Atbilde uzraksti kā skaitļu intervālu!
- (2 p.) 7. Atrisini divkāršu nevienādību $-7 \leq 5 + 2x \leq 9$! Atbilde uzraksti kā skaitļu intervālu!
- (3 p.) 8. Ar kādu mainīgā vērtību izteiksmes $5y + 1$ vērtība ir lielāka nekā izteiksmes $y - 1$ vērtība un mazāka nekā 6?
- (3 p.) 9. Matemātikas eksāmena 2. daļas astoņu uzdevumu atrisināšanai paredzētais laiks nepārsniedz 2 h. Cik minūtes vidēji skolēns var risināt vienu uzdevumu?
- (3 p.) 10. Klasē ir 25 skolēni. Divpadsmit no tiem prot angļu valodu, desmit – vācu un krievu, bet 5 skolēni zina visas trīs valodas: angļu, vācu un krievu. Vai izteiktie apgalvojumi ir patiesi? Ja nav, tad sastādi uzdevumu ar patiesiem apgalvojumiem!

9. Tiešā proporcionalitāte. Lineārā funkcija



$$s = v \cdot t$$

s – ceļš (km)

v – ātrums (km/h)

t – laiks (h)

Tieši proporcionali lielumi ir

- ✓ nobraukto **kilometru skaits** un patērētā **benzīna daudzums**;
- ✓ nobrauktais attālums (**km**) un ceļā pavadītais laiks (**h**);
- ✓ nopirkto pildspalvu **skaits** un **maksa** par pirkumu.

Sakarības starp diviem lielumiem var

→ *izteikt vārdiem*

- ✓ Ejot ar vienmērīgu ātrumu 4 km/h, cilvēks 30 minūtēs (0,5 h) var noiet 2 km. 1 stundā viņš noies 4 km, 2 stundās noies 8 km, 3 stundās noies 12 km utt.

→ *parādīt tabulā* →

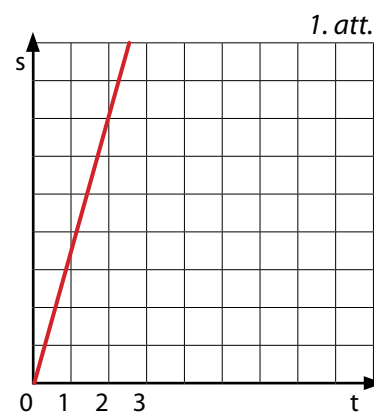
Laiks (h)	0,5	1	2	3
Noietais ceļš (km)	2	4	8	12

→ *uzrakstīt ar formulu* → $s = 4t$, kur ātrums $v = 4$ km/h, bet laiku apzīmē ar t , ceļu – ar s

→ *attēlot grafiski* → (skat. 1. att.)



Vienu no diviem savstarpēji sakarīgiem lielumiem parasti var izvēlēties brīvi, to sauc par **neatkarīgo mainīgo** jeb **argumentu**. Otra mainīgā vērtība ir jāaprēķina pēc **noteikta likuma**, tāpēc to sauc par **atkarīgo mainīgo**. **Sakarība**, kurā **katram neatkarīgajam mainīgajam (x)** atbilst tikai **viens atkarīgais mainīgais (y)**, ir **funkcija**.



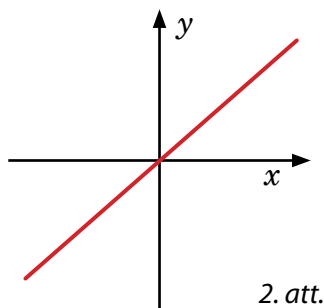
1. attēlā redzamo sakarību sauc par **tiešo proporcionalitāti**, jo neatkarīgajam mainīgajam t palielinoties vairākas reizes, tikpat reižu palielinās arī atkarīgais mainīgais s .



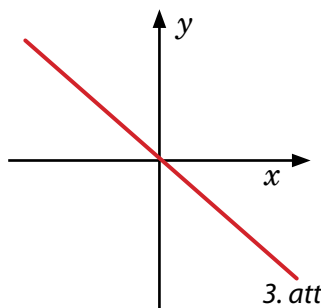
Funkcija $y = kx$ ir **tiešā proporcionalitāte**, k – proporcionalitātes koeficients, $k \neq 0$.

Tiešās proporcionalitātes **grafiks** ir **taisne**, kas iet caur koordinātu sākumpunktu $O(0; 0)$.

Ja $k > 0$, tad funkcija ir **augoša** (skat. 2.att.) Ja $k < 0$, tad funkcija ir **dilstoša** (skat. 3.att.).



2. att.



3. att.

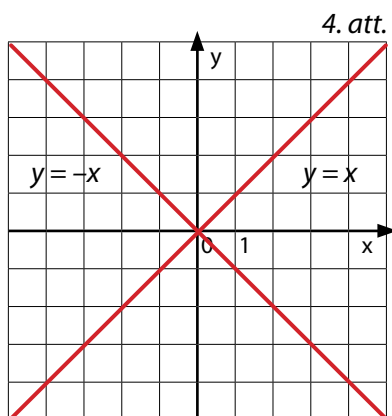
1. Papildini teikumus! Izmanto tematā skaidrotos terminus!

- Tieši proporcionālu lielumu piemērs ir nopirkto burtnīcu _____ un _____ par pirkumu.
- Uzrakstīt ar formulu vai attēlot grafiski var _____ starp tieši proporcionāliem lielumiem.
- Ar formulu $y = kx$ var uzrakstīt _____ funkciju.
- Mainīgo x sauc par _____ mainīgo, bet y sauc par _____ mainīgo.
- Tiešās proporcionalitātes grafiks ir _____.

☒ Konstruēt **tiešās proporcionalitātes** funkcijas $y = x$ ($k = 1$) un $y = -x$ ($k = -1$)! (skat. 4.att.)

a) Funkcijas $y = x$ grafiks (skat. 4. att.) ir taisne – koordinātu plaknes I un III kvadranta bisektrise (dala tos uz pusēm). Tā ir **augoša** funkcija, jo palielinoties x vērtībai, palielinās arī y vērtība.

b) Funkcijas $y = -x$ mainīgo vērtības ir savstarpēji pretēji skaitļi un grafiks ir II un IV kvadranta bisektrise (skat. 4. att.). Tā ir **dilstoša** funkcija, jo palielinoties x vērtībai, samazinās y vērtība.



4. att.



Lai konstruētu taisni, jāzina vismaz divi punkti, caur kuriem tā ies.

Lai konstruētu tiešās proporcionalitātes grafiku, viens punkts jau ir zināms, tas koordinātu sākumpunkts $O(0;0)$

Lai taisni varētu novilkt precīzāk, sastāda vērtību tabulu ar vairāku punktu koordinātām.

☒ Konstruēt funkciju $y = 3x$ un $y = -0,4x$ grafikus!

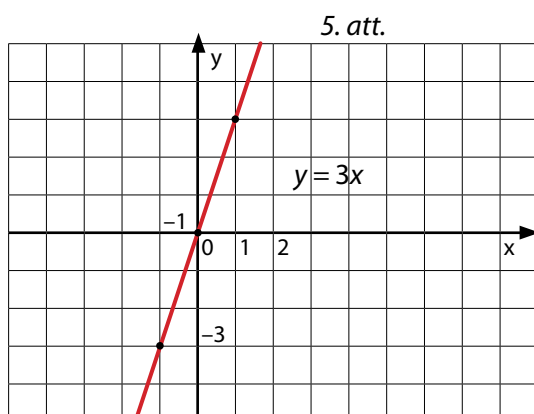
a) $y = 3x$ (skat. 5.att.)

Rīkojas šādi:

- izvēlas x vērtības un aprēķina atbilstošās y vērtības
- ja $x = -1$, tad $y = 3 \cdot (-1) = -3$;
- ja $x = 2$, tad $y = 3 \cdot 2 = 6$.
- sastāda vērtību tabulu

x	-1	0	2
y	-3	0	6

- koordinātu plaknē atliek tabulā norādīto punktu koordinātas un uzzīmē grafiku



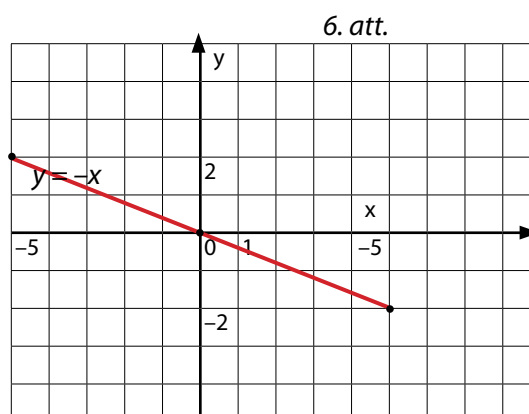
b) $y = -0,4x$ (skat. 6.att.)

Rīkojas šādi:

- izvēlas x vērtības un aprēķina atbilstošās y vērtības
- ja $x = -5$, tad $y = -0,4 \cdot (-5) = 2$;
- ja $x = 5$, tad $y = -0,4 \cdot 5 = -2$.
- sastāda vērtību tabulu

x	-5	0	5
y	2	0	-2

- koordinātu plaknē atliek tabulai atbilstošos punktus un uzzīmē grafiku



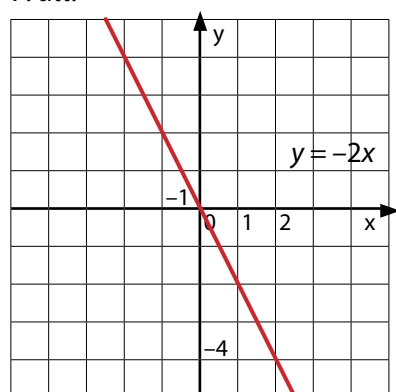
2. Starp dotajām funkcijām nosaki, kuras ir tiešās proporcionalitātes funkcijas!

Konstruē to grafikus!

- a) $y = x + 3$ b) $y = -3x$ c) $y = \frac{1}{3}x - 0,3$ d) $y = 0,3x$

☒ Dots funkcijas $y = -2x$ grafiks (skat. 7.att.). Saskatīt likumsakarību starp mainīgajiem x un y ! Sastādīt vērtību tabulu! Noteikt, vai punkts $A(-8; 10)$ pieder funkcijas grafikam!

7. att.



Rīkojas šādi:

- nolasa atbilstošās punktu koordinātas un sastāda vērtību tabulu →

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	0	-2	-4

- Ja $x = -8$, tad $y = -2 \cdot (-8) = 16$.
Tā kā $16 \neq 10$, tad punkts $A(-8; 10)$ nepieder funkcijas grafikam.

3. Pabeidz aizpildīt tiešās proporcionalitātes funkcijas vērtību tabulu!
Nosaki k ! Uzraksti šo funkciju ar formulu $y = kx$!

x	-2	-1		1		3
y		4	0		-8	-12

4. Gatavojot ābolu kompotu, cukura daudzumu y (kilogramos) atkarībā no ūdens daudzuma x (litros) rēķina pēc formulas $y = 0,2x$. Sastādi vērtību tabulu cukura daudzuma izmaiņām, ja ūdens daudzums mainās no 1 l līdz 10 l (veselos skaitļos)!

- ☑ Māte nopirka piena paku par 42 santīmiem un vairākas biezpiena paciņas, katru par 38 santīmiem. Maksa par pirkumu var mainīties atkarībā no biezpiena paciņu skaita. Ja maksu par pirkumu apzīmē ar y , bet biezpiena paciņu skaitu ar x , tad formula $y = 38x + 42$ izsaka maksas par pirkumu izmaiņas atkarībā no biezpiena paciņu skaita.

Funkcija $y = ax + b$ ir **lineārā funkcija**.

x – neatkarīgais mainīgais, y – atkarīgais mainīgais, a un b – skaitļi (koeficienti).

Lineārās funkcijas grafiks ir **taisne**.



Ja $a > 0$, tad lineārā funkcija ir **augoša**, bet ja $a < 0$, tad – **dilstoša**, tāpat kā tiešās proporcionalitātes funkcija (*skat. 2. un 3. att.*).

Skaitlis b norāda funkcijas **krustpunktu** ar Oy asi. Tā koordinātas ir (0; b).

Ja $b = 0$, tad lineārā funkcija $y = ax$ ir **tiešā proporcionalitāte**.



- ☑ Konstruēt funkcijas $y = \frac{1}{2}x - 2$ grafiku!

Noteikt funkcijas grafika krustpunktu koordinātas ar koordinātu asīm!

Rīkojas šādi:

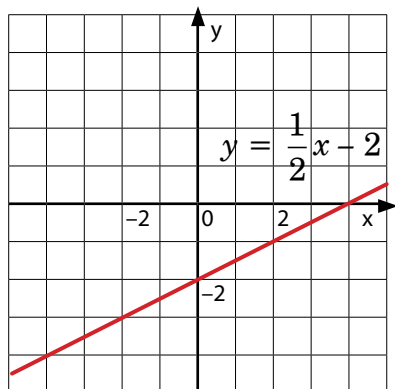
x	-2	0	2
y	-3	-2	-1

Ja vairākām lineārām funkcijām ir **vienāds** koeficients a , bet koeficienti b ir **dažādi**, to grafiki ir **paralēlas taisnes**.

- ➔ sastāda vērtību tabulu

➔ ja $x = -2$, tad $y = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 = -1 - 2 = -3$ utt.

- ➔ koordinātu plaknē atliek punktus, kuru koordinātas ir tabulā. Caur punktiem novelk taisni.



→ funkcijas grafika krustpunktu ar Oy asi var noteikt, ja x vietā liek 0. Atbilde redzama tabulā un grafikā.

→ Tātad lineārās funkcijas $y = \frac{1}{2}x - 2$ grafiks krusto Oy asi punktā $(0; -2)$.

→ Lai aprēķinātu krustpunktu ar Ox asi, y vietā liek 0 un jāatrisina vienādojums

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\frac{1}{2}x = 2$$

$$x = 2 : \frac{1}{2} = 4$$

→ Tātad funkcijas grafiks krusto Ox asi punktā $(4; 0)$.

5. Doto lineāro funkciju grafikus konstruē vienā koordinātu plaknē! Kuru funkciju grafiki ir paralēlas taisnes? Uzraksti katras funkcijas grafika krustpunktus ar koordinātu asīm!

a) $y = 3x + 1$ b) $y = \frac{1}{2}x - 4$ c) $y = -3x + 2$ d) $y = -3x - 1$

6. Upes straume nes balķi ar ātrumu 40 m/min. Izvēlies atbilstošu mērogu un konstruē grafiku!

7. Izdomā piemēru, kur ikdienā tiek izmantota tiešā proporcionalitāte vai lineāra funkcija (tie varētu būt dažādi maksājumi)! Uzraksti atbilstošu formulu un sastādi vērtību tabulu!

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

(1 p.) 1. Tieši proporcionāli lielumi ir telefonsarunas ilgums un ____ par to.

(1 p.) 2. Formulā $y = -2x$ neatkarīgais mainīgais ir ____.

(1 p.) 3. Ar formulu $y = 7x - 1$ ir uzrakstīta ____ funkcija.

(2 p.) 4. Ja funkcijas $y = 1 - 5x$ arguments ir 2, tad funkcijas vērtība ir ____.

(2 p.) 5. Ja punkts $(2; m)$ pieder funkcijas $y = 2x + 1$ grafikam, tad $m =$ ____.

(2 p.) 6. Funkciju $y = -3x + 1$ un $y = 3x - 1$ grafiku krustpunkta koordinātas ir (____; ____).

- (2 p.) 7. Uzraksti funkcijas $y = 4x - 3$ grafikam divu paralēlu taisņu formulu piemērus (tiešās proporcionalitātes un lineārās funkcijas)!
- (3 p.) 8. Zināms, ka 1 litra medus masa ir 1,4 kg. Uzraksti formulu, kas izsaka medus masas y (kilogramos) atkarību no tilpuma x (litros)! Cik kg medus ir 3 litros? Cik litru medus jāņem, lai tā masa būtu 7 kg?
- (3 p.) 9. Vienā koordinātu plaknē konstruē funkciju $y = x + 1$; $y = x - 2$; $y = x + 4$ grafikus!
Kā mainās funkcijas $y = x + b$ grafika novietojums koordinātu plaknē, ja mainās b vērtība?
- (3 p.) 10. Vienā koordinātu plaknē konstruē funkciju $y = -2x + 3$; $y = x + 3$; $y = \frac{1}{3}x + 3$ grafikus! Kā mainās funkcijas $y = ax + 3$ grafika novietojums koordinātu plaknē, ja mainās a vērtība?

10. Ievads ģeometrijā. Lēnķis, tā veidi, bisektrise. Attālums



Ģeometrija ir matemātikas nozare, kas pēta ģeometrisku figūru īpašības un savstarpējo novietojumu. **Ģeometrijas pamatjēdzieni ir punkts, līnija, virsma.**

Punkts	Līnija, taisne	Virsma, plakne
Asociācijas ✓ smilšu grauds Attēlojums Punktu apzīmējumi A, B, M – ar lielajiem alfabēta burtiem. Punkta piederība taisnei. ✓ $A \in a$ un $B \notin a$. Stars – taisnes daļa uz vienu pusi no punkta uz taisnes. ✓ uz taisnes AB ir divi stari SA un SB (<i>pirmo nosauc sākumpunktu</i>) Nogrieznis – taisnes daļa starp diviem punktiem. Punkti ir nogriežņa galapunkti. ✓ Nogrieznis AB. ✓ uz taisnes n atrodas nogrieznis AB jeb $AB \in n$. Attālums starp diviem punktiem ir nogriežņa garums.	Asociācijas ✓ diegs, ✓ mats Attēlojums Līniju apzīmējumi d, n – ar mazo burtu vai AB – ar diviem lielajiem burtiem. Taišņu savstarpējais novietojums ✓ $a \perp b$ perpendikulāras taisnes ✓ m un n ir krustiskas taisnes ✓ $c \parallel d$ paralēlas taisnes ✓ $AB \perp k$ Attālums no punkta A līdz taisnei k ir perpendikula AB garums.	Asociācijas ✓ galds, ✓ ziepju burbulis Attēlojums Virsmu apzīmējumi α – ar grieķu alfabēta burtu vai ABC – ar lielajiem burtiem, nosaucot daudzstūra virsotnes. Plakņu, taisņu un punktu savstarpējais novietojums ✓ taisne t krusto plakni ABCD punktā N un $N \in ABCD$; ✓ taisne c nekrusto plakni ABCD jeb $c \parallel ABCD$ (paralēlas); ✓ taisne k atrodas plaknē ABCD jeb $k \in ABCD$.

1. Uzraksti attēlos redzamos

a) līniju piemērus; b) virsmu piemērus!



1. att.



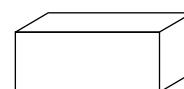
2. att.



3. att.



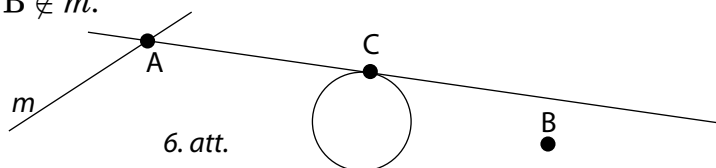
4. att.



5. att.

2. Apskati 6. attēlu un nosaki, kuri apgalvojumi ir patiesi!

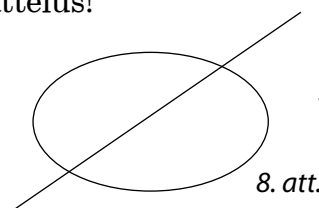
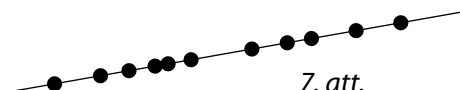
- a) Taisnes m un AC krustojas punktā A.
- b) $B \in AC$.
- c) Riņķa līnijai un taisnei AC ir kopīgs punkts C.
- d) $B \notin m$.



3. Taisnei piemīt vairākas īpašības:

- a) uz taisnes ir bezgalīgi daudz punktu;
- b) caur diviem dažādiem punktiem var novilkt tikai vienu taisni;
- c) taisne sadala plakni divās pusplaknēs.

Šīm īpašībām piekārto atbilstošos attēlus!



4. Uzzīmē taisni a , uz tās atliec punktus B un C, bet ārpus tās dažādās pusplaknēs punktus D un E! Pieraksti to, izmantojot simbolus $\in$ un $\notin$! Kā vēl var nosaukt taisni a ?

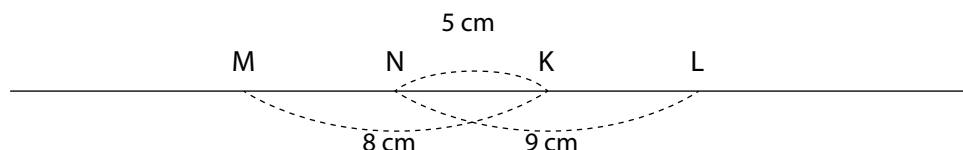
Cik staru ir uz dotās taisnes?

5. Plaknē uzzīmē trīs taisnes! Cik krustpunktu tām var būt? Apskati visus iespējamus gadījumus un uzzīmē atbilstošus zīmējumus!

Nogriežni raksturo tā **garums** – skaitlis, kas parāda, **cik vienības nogriežņu** satur atliktais nogrieznis. Ja nogrieznis sastāv no vairākām daļām (nogriežņiem), tad tā garums vienāds ar atsevišķo daļu garumu summu. **Garuma mērvienības** ir 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m un 1 km.



☒ Punkti M, N, K un L secīgi atlikti uz vienas taisnes. Noteikt nogriežņu MN, KL un ML garumus, ja $NK = 5$ cm, $MK = 8$ cm un $NL = 9$ cm! Apskati 10. attēlu!



Atrisinājums

$$MN = 8 - 5 = 3 \text{ (cm)},$$

$$KL = 9 - 5 = 4 \text{ (cm)},$$

$$ML = 3 + 5 + 4 = 12 \text{ (cm)}.$$

6. Uzzīmē taisni t ! Uz tās atliec punktus B, R un P tā, ka $R \in BP$!

- Nosauc zīmējumā redzamos nogriežņus!
- Aprēķini garāko nogriežni, ja īsāko nogriežņu garumi ir 17 mm un 28 mm!

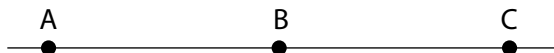
7. Nogriežņa AB garums ir 30 cm. Uz nogriežņa atlikts punkts C. Aprēķini nogriežņus AC un BC, ja

- nogriežnis AC ir 2 reizes garāks nekā BC;
- $AC : CB = 2 : 3$;
- nogriežnis BC ir par 8 cm garāks nekā AC!



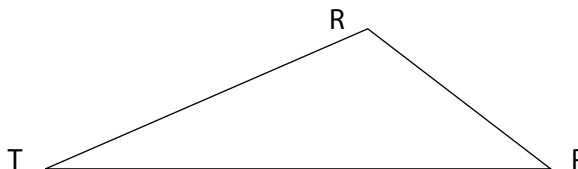
**Ja $AB + BC = AC$,
tad punkti A, B un
C atrodas uz vienas
taisnes.**

Trīs punkti var atrasties uz vienas taisnes un var arī neatrasties. Ja zināmi visi trīs attālumi starp punktiem, tad var noskaidrot, **vai punkti atrodas uz vienas taisnes.**



Ja trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes, tad katrs attālums starp diviem punktiem ir mazāks nekā abu pārējo attālumu summa.

**$TP < TR + RP$
 $TR < TP + RP$
 $RP < TR + TP$**



8. Pieņemsim, ka pilsētu var attēlot kā punktu, bet šoseju – kā taisni. Noskaidro, vai trīs dotās pilsētas atrodas uz vienas taisnes!

a) Pļaviņas, Madona un Gulbene

Pļaviņas – Madona	47 km
Madona – Gulbene	50 km
Pļaviņas – Gulbene	97 km

b) Jelgava, Tukums, Saldus

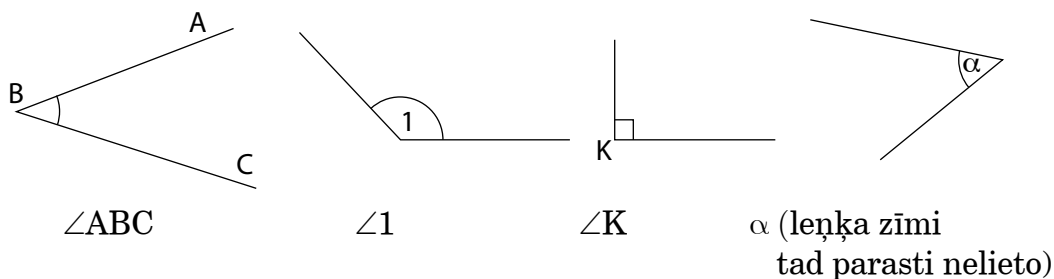
Jelgava – Saldus	83 km
Jelgava – Tukums	56 km
Tukums – Saldus	70 km

Leņķis, tā bisektrise



Leņķis ir plaknes daļa, ko ierobežo divi stari ar kopēju sākumpunktu. Šo punktu sauc par leņķa **viršotni**, bet starus – par **leņķa malām**. Leņķi apzīmē šādi $\angle$.

Tulkojumā no latīņu valodas leņķis – stūris, kakts.



Leņķa **lielumu** nosaka pēc tā, cik plati atvērtas tā malas.
Leņķus mēra **grādos**, izmantojot transportieri.

Leņķu veidi

Šaurš leņķis $0^\circ < x < 90^\circ$	Taisns leņķis 90°	Plats leņķis $90^\circ < x < 180^\circ$
Izstiepts leņķis 180°	Atvērts leņķis $180^\circ < x < 360^\circ$	Pilns leņķis 360°

9. Uzzīmē doto leņķi un nosauc tā veidu, ja

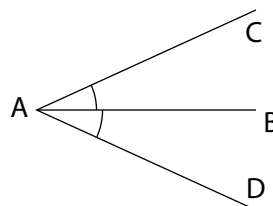
- a) $\angle A = 80^\circ$ b) $\angle 1 = 160^\circ$ c) $\angle MNK = 90^\circ$ d) $\alpha = 310^\circ$

Leņķa bisektrise

Leņķa bisektrise ir **stars**, kura sākumpunkts ir leņķa virsotnē un kurš **sadala leņķi divās vienādās daļās**.



Stars **AB** ir leņķa CAD **bisektrise**.
 $\angle CAB = \angle BAD$



10. Stars TU ir leņķa STV bisektrise. Aprēķini leņķi UTV, ja

- a) leņķis STV ir 120° b) leņķis STU ir 42°

11. Uzzīmē taisnu leņķi, sadali to trīs vienādās daļās un novelc malējo leņķu bisektrises!

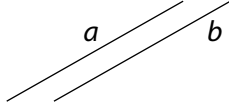
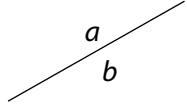
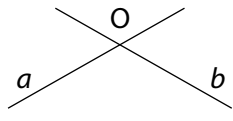
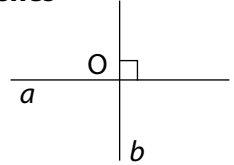
Aprēķini leņķi starp novilktajām bisektrisēm!

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Taisnes daļa uz vienu pusi no kāda tās punkta kopā ar šo punktu ir _____.
- (1 p.) 2. Plaknes daļa, ko ierobežo divi stari ar kopēju sākumpunktu, ir _____.
- (1 p.) 3. Izstiepta leņķa lielums ir _____°.
- (2 p.) 4. Uzzīmē dotajiem apgalvojumiem atbilstošu zīmējumu un pieraksti tos ar simboliem:
a) punkts A pieder taisnei m ;
b) punkts B nepieder taisnei m !
- (2 p.) 5. Punkti M, N, K dotajā secībā atrodas uz vienas taisnes. Aprēķini NK garumu, ja $MN = 7\text{cm}$, $MK = 7\text{dm}$!
- (2 p.) 6. Stars OK ir leņķa AOB bisektrise. Aprēķini $\angle KOB$, ja $\angle AOB = 68^\circ$!
- (2 p.) 7. Nogrieznis VZ ir 42cm. Punkts T sadala nogriezni attiecībā 3 : 4. Aprēķini nogriežņu VT un TZ garumus!
- (3 p.) 8. Nosaki apgalvojumu patiesumu!
a) Taisne ir bezgalīga, bet redzēt un uzzīmēt var tikai daļu no tās.
b) Pagarinot leņķa malas, iegūst lielāku leņķi.
c) Skatoties uz 30° lielu leņķi caur lupu, kura palielina 2 reizes, redzams 60° liels leņķis.
- (3 p.) 9. Cik dažādu krustpunktu var būt 3 stariem? Izveido zīmējumus visiem iespējamiem gadījumiem!
- (3 p.) 10. Uzraksti visus lielos latviešu alfabēta burtus, kuros ir vienādi nogriežņi!

11. Ar taisņu savstarpējo novietojumu saistītie leņķi

Taisnes, kuras nekrustojas, ir paralēlas taisnes	Taisnes sakrīt	Taisnes krustojas	
 Paralēlas taisnes apzīmē šādi: $a \parallel b$	 Tās apzīmē šādi: $a = b$	Taisnes, kuras krustojas, ir krustiskas taisnes  Tās apzīmē šādi: $a \cap b = O$ O – krustošanās punkts	Taisnes, kuras krustojas un veido taisnu leņķi, ir perpendikulāras taisnes  Tās apzīmē šādi: $a \perp b$ O – krustošanās punkts

Paralēlu taisņu piemēri



Slīdes ir paralēlas



Galda malas ir paralēlas

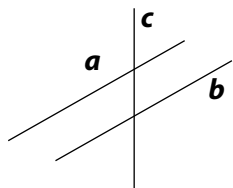


Loga malas ir paralēlas

Paralēlu taisņu īpašības

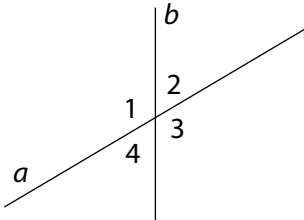
Caur punktu ārpus taisnes var novilkt tikai vienu taisni, kas ir paralēla dotajai.



Divas taisnes, kas ir paralēlas trešajai taisnei, ir paralēlas savā starpā.	Divas taisnes, kas ir perpendikulāras pret trešo taisni, ir savā starpā paralēlas.	Taisne, kas ir perpendikulāra pret vienu no divām paralēlajām taisnēm, ir perpendikulāra arī pret otru paralēlu taisni.	Ja taisne krusto vienu no paralēlajām taisnēm, tad tā krusto arī otro pirmajai taisnei paralēlu taisni.
Ja $a \parallel c$ un $b \parallel c$, tad $a \parallel b$	Ja $a \perp c$ un $b \perp c$, tad $a \parallel b$	Ja $a \parallel b$ un $c \perp a$, tad $c \perp b$.	

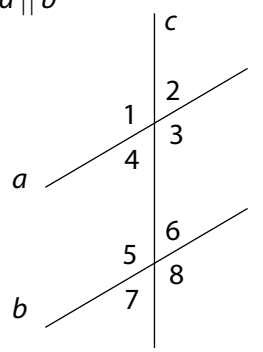


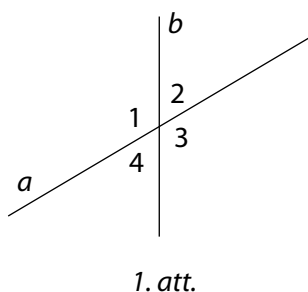
Ja taisnes nav paralēlas un nesakrīt, tad tās krustojas.
Divām taisnēm krustojoties, veidojas četri leņķi.

Blakusleņķi ir divi leņķi, kuriem ir viena kopīga mala, bet pārējās divas malas veido izstieptu leņķi. $\angle 1$ un $\angle 2$, $\angle 2$ un $\angle 3$, $\angle 3$ un $\angle 4$, $\angle 1$ un $\angle 4$ ir blakusleņķi	Divi leņķi, kas rodas, krustojoties divām taisnēm, un kas nav blakusleņķi, ir krustleņķi. $\angle 1$ un $\angle 3$, $\angle 2$ un $\angle 4$ ir krustleņķi	
Blakusleņķu summa ir 180° $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$		Krustleņķi ir vienādi $\angle 1 = \angle 3$ $\angle 2 = \angle 4$

1. Divām taisnēm krustojoties, viens no blakusleņķiem ir 3 reizes lielāks nekā otrs. Cik liels ir katrs leņķis?
2. Krustojoties divām taisnēm, veidojas četri leņķi. Divu leņķu summa ir 220° . Aprēķini katru no četriem leņķiem!
3. Krustojoties divām taisnēm, trīs iegūto leņķu summa ir 320° . Aprēķini katru no četriem leņķiem!



$a \parallel b$ 	Kāpšļu leņķi: $\angle 1$ un $\angle 5$ $\angle 4$ un $\angle 8$ $\angle 2$ un $\angle 6$ $\angle 3$ un $\angle 7$ Kāpšļu leņķi ir vienādi $\angle 1 = \angle 5$ $\angle 4 = \angle 8$ $\angle 2 = \angle 6$ $\angle 3 = \angle 7$	Iekšējie šķērsleņķi: $\angle 4$ un $\angle 6$ $\angle 3$ un $\angle 5$ Iekšējie šķērsleņķi ir vienādi $\angle 4 = \angle 6$ $\angle 3 = \angle 5$	Iekšējie vienpusleņķi: $\angle 4$ un $\angle 5$ $\angle 3$ un $\angle 6$ Iekšējo vienpusleņķu summa ir 180° $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$
---	---	---	---



- ☑ 1. attēlā
 $\angle 2 = 25^\circ$. Aprēķini pārējos leņķus!
- 1) $\angle 2 = \angle 4 = 25^\circ$, jo $\angle 2$ un $\angle 4$ krustleņķi un tie ir vienādi;
 - 2) $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$, jo $\angle 1$ un $\angle 2$ ir blakusleņķi, kuru summa ir 180° .
 - 3) $\angle 3 = \angle 1 = 155^\circ$, jo $\angle 3$ un $\angle 1$ ir krustleņķi, kas ir vienādi.

☑ 2. attēlā

$\angle NMO : \angle LMN = 1 : 3$. Lai aprēķinātu $\angle NMO$, $\angle LMN$, izmanto apzīmējumus nezināmajiem lielumiem:

$x...$ tik $^\circ$ ir $\angle NMO$

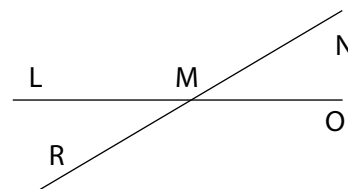
$3x...$ tik $^\circ$ ir $\angle LMN$

$x + 3x = 180^\circ$, jo $\angle NMO$ un $\angle LMN$ ir blakusleņķi,
kuru summa ir 180°

$$4x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ : 4 = 45^\circ, \text{ t.i., } \angle NMO = 45^\circ$$

$$3x = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ, \text{ t.i., } \angle LMN = 135^\circ.$$



2. att.

4. Divas paralēlas taisnes krusto trešā taisne. Aprēķini iegūtos leņķus, ja viens no tiem ir 68° !

12. Trijstūru veidi. Trijstūra elementi.

Trijstūra vienādības pazīmes



Trijstūris ir daudzstūris, kuram ir trīs malas.

Malas **AB, BC, AC**
Virsoņi **A, B, C**
Leņķi **CAB, ABC, BCA**

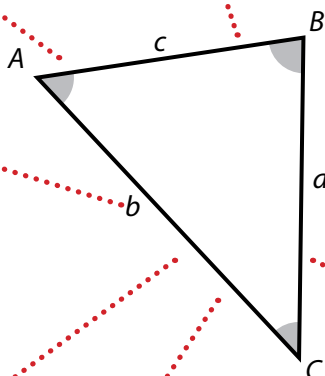
Trijstūra **perimetrs P** ir
trijstūra malu summa:
 $P(ABC) = AB + BC + AC$

Malas **AB** **pielenķi** ir
CAB un **CBA**;
malas **BC** **pielenķi** ir
BCA un **ABC**;
malas **AC** **pielenķi** ir
CAB un **BCA**

Leņķis **CAB** ir **pretleņķis**
malai **BC**, mala **BC** ir **pretmala**
leņķim **CAB**.

Leņķis **ABC** ir **pretleņķis**
malai **AC**, mala **AC** ir **pretmala**
leņķim **ABC**.

Leņķis **BCA** ir **pretleņķis** malai
AB, mala **AB** ir **pretmala**
leņķim **BCA**.

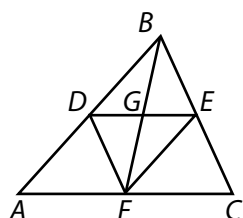


Jebkura trijstūra mala ir īsāka
nekā divu pārējo malu sum-
ma un lielāka nekā šo malu
starpība.

$$\begin{aligned} AC - BC &< AB < AC + BC \\ AB - AC &< BC < AB + AC \\ AB - BC &< AC < AB + BC \end{aligned}$$

Trijstūrī pret **lielāko** malu
atrodas **lielākais** leņķis.
 $\angle CAB > \angle BCA \rightarrow BC > AB$

Trijstūra **leņķu summa** ir
180°.
 $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$



1. att.

1. Cik trijstūrus vari saskaitīt 1. att.? Nosauc šos trijstūrus!

2. Uzzīmē trijstūri EFG! Nosauc trijstūra

- a) malas EF pretleņķi b) malas FG pielenķus
- c) leņķa EFG pretmalu

☒ Lai noteiktu, vai ir trijstūris, kura malu garumi 7 cm, 8 cm un 20 cm, rīkojas šādi:

→ salīdzina trijstūra jebkuru divu malu summu ar trešās malas garumu

$$\rightarrow 7 < 20 + 8, 8 < 20 + 7, 20 > 7 + 8$$

→ izdara secinājumu par iegūto nevienādību patiesumu

→ tā kā $20 > 7 + 8$, tad tāds trijstūris neeksistē.

3. Vai iespējams trijstūris, kura malu garumi ir:

- a) 13 cm, 2 cm, 8 cm b) 6 dm, 8 dm, 7 dm

☒ Lai noteiktu, vai ir trijstūris, kura leņķi ir vienādi 120° un 70° , rīkojas šādi:

→ trijstūra divu leņķu summu salīdzina ar tā visu leņķu summu 180° ,

→ tā kā $120^\circ + 70^\circ > 180^\circ$, bet jebkura trijstūra leņķu summa ir 180° , tad tāds trijstūris neeksistē.

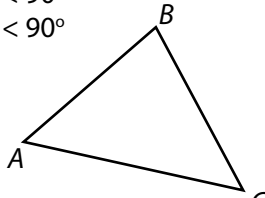
- ☑ Lai aprēķinātu trijstūra leņķus, ja to lielumu attiecība ir 1:2:2, sastāda vienādojumu un rīkojas šādi:

- ➔ ar x apzīmē vienu vienību $\rightarrow x \dots$ tik $^\circ$ ir viena vienība
- ➔ izsaka katra leņķa lielumu, izmantojot vienību x
 - $\rightarrow 1x \dots$ tik grādu ir pirmais leņķis
 - $2x \dots$ tik grādu ir otrais leņķis
 - $2x \dots$ tik grādu ir trešais leņķis
- ➔ sastāda vienādojumu, zinot, ka trijstūra leņķu summa ir 180°
 - $\rightarrow 1x + 2x + 2x = 180^\circ$
- ➔ atrisina vienādojumu $\rightarrow 5x = 180^\circ$
 - $x = 180^\circ : 5 = 36^\circ \dots$ tik liela ir viena vienība un arī pirmais leņķis
 - $2 \cdot 36^\circ = 72^\circ \dots$ tik liels ir otrais un trešais leņķis

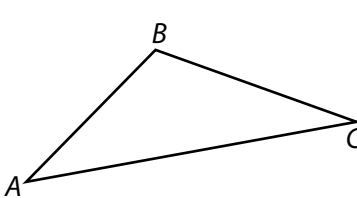
Atbilde. Trijstūra leņķi ir $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

Trijstūru iedalījums pēc leņķiem

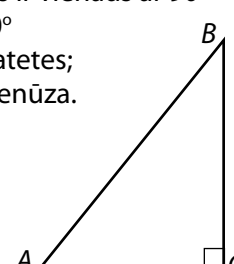
Šaurleņķa trijstūrim visi leņķi ir mazāki par 90°
 $\angle CAB < 90^\circ$
 $\angle ABC < 90^\circ$
 $\angle BCA < 90^\circ$



Platleņķa trijstūrim viens leņķis ir lielāks par 90°
 $\angle ABC > 90^\circ$

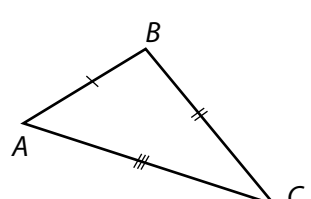


Taisnleņķa trijstūrim viens leņķis ir vienāds ar 90°
 $\angle CAB = 90^\circ$
BC, AC – katetes;
AB – hipotenūza.

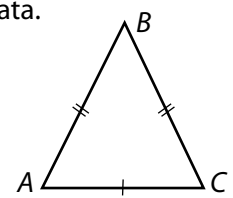


Trijstūru iedalījums pēc malām

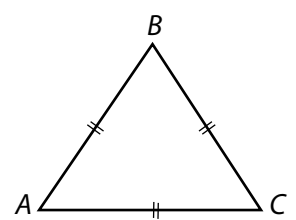
Dažādmalu trijstūrim ir dažāda garuma malas:



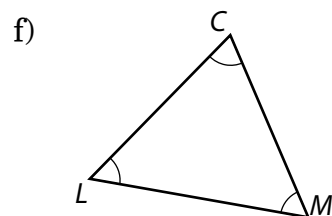
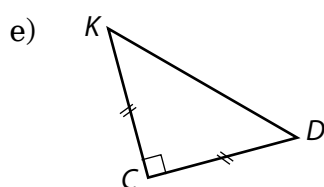
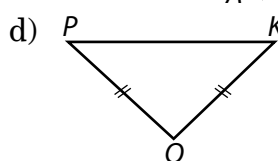
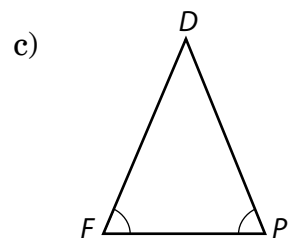
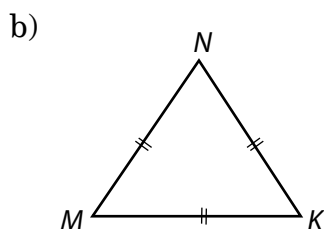
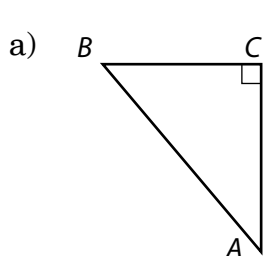
Vienādsānu trijstūrim sānu malas ir vienādas:
AB, BC – sānu malas, **AB = BC**;
AC – pamats
 $\angle CAB, \angle BCA$ – leņķi pie pamata.



Vienādmalu trijstūrim visas malas ir vienādas:
AB = BC = AC

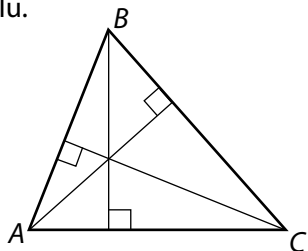


4. Nosaki katra trijstūra veidu un, kur tas iespējams, trijstūra leņķu lielumus!

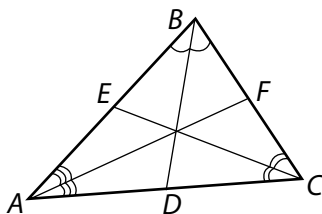


Trijstūra elementi

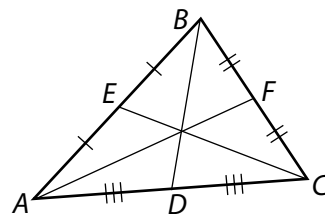
Trijstūra **augstums** ir novilkts perpendikulāri pret trijstūra malu.



Trijstūra **bisektrise** sadala trijstūra leņķi uz pusēm un atrodas trijstūra iekšpusē.



Trijstūra **mediāna** savieno trijstūra virsotni ar pretējās malas viduspunktu.



Jebkurā trijstūrī var novilkt trīs mediānas, trīs augstumus, trīs bisektrises.

5. a) Uzzīmē šaurleņķa trijstūri DEF! Izmēri trijstūra perimetru! Novelc tā bisektrisi DA!

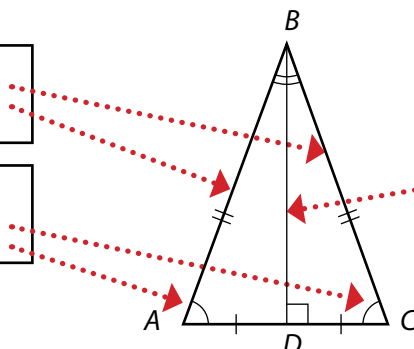
b) Uzzīmē platleņķa trijstūri KLM! Novelc tā mediānu LB!

c) Uzzīmē taisnleņķa trijstūri PRS, ja tā hipotenūza ir PR! Kā sauc malas PS un RS? Nosauc malas PS pretleņķi!

Vienādsānu trijstūra īpašības

Sānu malas ir vienādas
 $AB = BC$

Leņķi pie pamata ir vienādi
 $\angle BAC = \angle BCA$



Augstums, kas novilkts pret pamatu, ir gan bisektrise, gan mediāna.

$BD \perp AC$ (BD – augstums)
 $AD = DC$ (BD – mediāna)
 $\angle ABD = \angle CBD$
(BD – bisektrise)

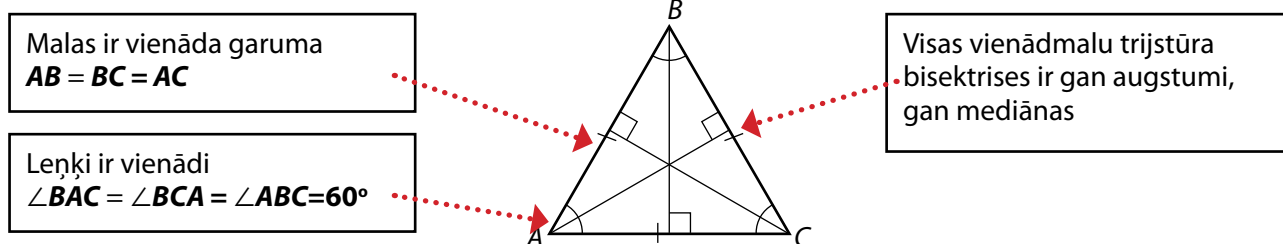
☒ Ja vienādsānu trijstūra pamats ir 12 cm, perimetrs 38 cm, lai aprēķinātu tā sānu malas garumu, rīkojas šādi:

- atceras, ka vienādsānu trijstūra sānu malas ir vienādas, tad dotajam trijstūrim ir divas vienāda garuma malas
- vienādsānu trijstūra perimetra formula ir $P = a + a + b$, kur a – sānu mala, b – pamats
- ievietojot formulā perimetra un zināmās malas garumu, iegūst lineāru vienādojumu
- $38 = a + a + 12$, to atrisina
 $-2a = 12 - 38$
 $-2a = -26$
 $a = -26 : (-2) = 13(\text{cm})$ – tik liela ir dotā trijstūra sānu mala.

Atbilde. Vienādsānu trijstūra sānu malas ir 13 cm garas.

6. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 3 cm, bet otra mala – 8 cm. Aprēķini trijstūra perimetru!

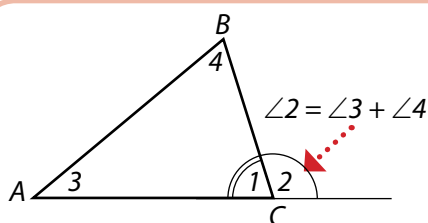
Vienādmalu trijstūra īpašības



Lai aprēķinātu vienādmalu trijstūra perimetru, ja tā mala ir 0,5 cm, tad rīkojas šādi:

- malas garumu pareizina ar 3 $\rightarrow 0,5 \cdot 3 = 1,5 (\text{cm})$.

Atbilde. Vienādmalu trijstūra perimetrs ir 1,5 cm.



Trijstūra ārējais leņķis $\angle 2$ ir trijstūra iekšējā leņķa $\angle 1$ blakusleņķis. Trijstūra ārējais leņķis ir vienāds ar divu trijstūra iekšējo leņķu summu, kuri nav tā blakusleņķi. $\angle 2 = \angle 3 + \angle 4$



☒ Lai aprēķinātu trijstūra ABC leņķu B un C summu, ja leņķa A ārējais leņķis ir 136° , rīkojas šādi:

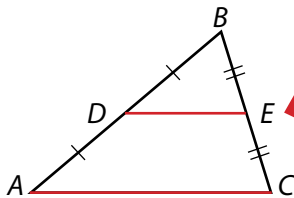
- izmanto trijstūra ārējā leņķa īpašību, ka tā lielums ir vienāds ar divu iekšējo leņķu summu, kas nav tā blakusleņķi,
- tātad $\angle B + \angle C = 136^\circ$



Trijstūra viduslīnija ir nogrieznis, kas savieno divu malu viduspunktus.

Trijstūra viduslīnijas īpašības

Viduslīnija DE ir paralēla trijstūra malai AC
 $DE \parallel AC$



Viduslīnija DE ir vienāda ar pusi no trijstūra malas AC

$$DE = \frac{1}{2} AC$$

Jebkurā trijstūrī var novilkt trīs viduslīnijas.

☑ Lai aprēķinātu perimetru vienādmalu trijstūrim, ja tā viduslīnijas garums ir 4cm, rīkojas šādi:

→ tā kā viduslīnija ir vienāda ar pusi no atbilstošās trijstūra malas, tad vienādmalu trijstūra mala ir divreiz garāka nekā tai atbilstošā viduslīnija, $\rightarrow 4 \text{ cm} \cdot 2 = 8 \text{ cm}$,

→ vienādmalu trijstūrī visas malas ir vienādas,

$$\text{tad } P = 3 \cdot a \rightarrow P = 3 \cdot 8 = 24 \text{ (cm)}.$$

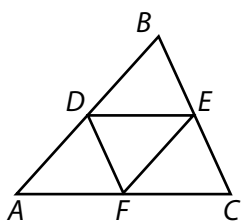
☑ Ja trijstūra ABC perimetrs ir 28 cm un tajā ir novilkta trīs viduslīnijas (skat. 2. att.), tad trijstūra DEF perimetru aprēķina šādi:

→ pēc trijstūra viduslīnijas īpašības $DE = \frac{1}{2} AC$, $DF = \frac{1}{2} BC$, $EF = \frac{1}{2} AB$

→ izsaka trijstūra DEF perimetru $\rightarrow$

$$P(\triangle DEF) = DE + EF + FD = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB =$$

$$\frac{1}{2} (AC + BC + AB) = \frac{1}{2} P(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14 \text{ (cm)}.$$



2. att.



Divi trijstūri ir **vienādi**, ja tos var uzlikt vienu uz otra tā, ka tie sakrīt.

Pierakstot vienādus trijstūrus, svarīga ir burtu secība, kas norāda atbilstošās malas un leņķus.

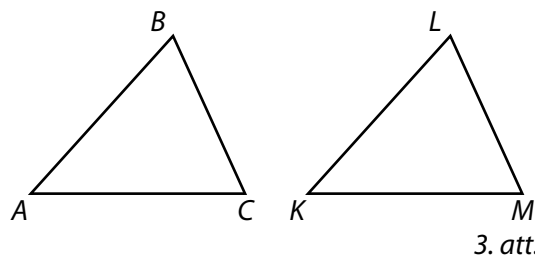
Atbilstošās malas un **atbilstošie leņķi** ir tie, kas ir savā starpā vienādi.

Piemēram, AB un KL ir atbilstošās malas; $\triangle ACB$ un $\triangle KML$ ir atbilstošie leņķi.

Atbilstošos elementus raksta noteiktā secībā (skat. 3. att.)

Ja $\triangle ABC = \triangle KLM$ (skat. 3. att.), tad

$$\begin{aligned} AB &= KL & \angle ABC &= \angle KLM \\ AC &= KM & \angle BAC &= \angle LKM \\ BC &= LM & \angle ACB &= \angle KML \end{aligned}$$

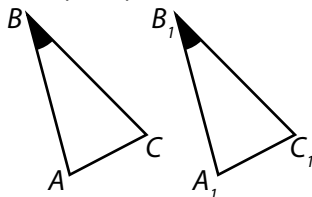


7. Trijstūri ABC, DEF un KLM ir vienādi, $AB = 3$ cm, $EF = 4$ cm, $KM = 5$ cm. Aprēķināt katra trijstūra nezināmās malas!

Trijstūru vienādības pazīmes

1. pazīme

Ja viena trijstūra **divas malas** un **leņķis starp tām** ir atbilstoši vienādi ar otrā trijstūra divām malām un leņķi starp tām, tad trijstūri ir vienādi (**mlm**)

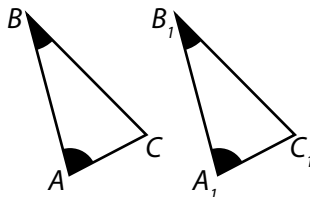


$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

- 1) $AB = A_1B_1$
- 2) $BC = B_1C_1$
- 3) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

2. pazīme

Ja viena trijstūra **mala** un **tās pieleņķi** ir atbilstoši vienādi ar otrā trijstūra malu un tās pieleņķiem, tad trijstūri ir vienādi (**lml**)

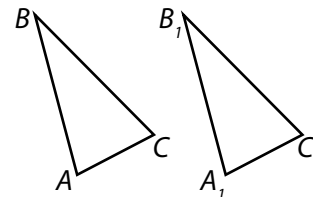


$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

- 1) $AB = A_1B_1$
- 2) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$
- 3) $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

3. pazīme

Ja viena trijstūra **malas** ir atbilstoši vienādas ar otrā trijstūra malām, tad trijstūri ir vienādi (**mmm**)

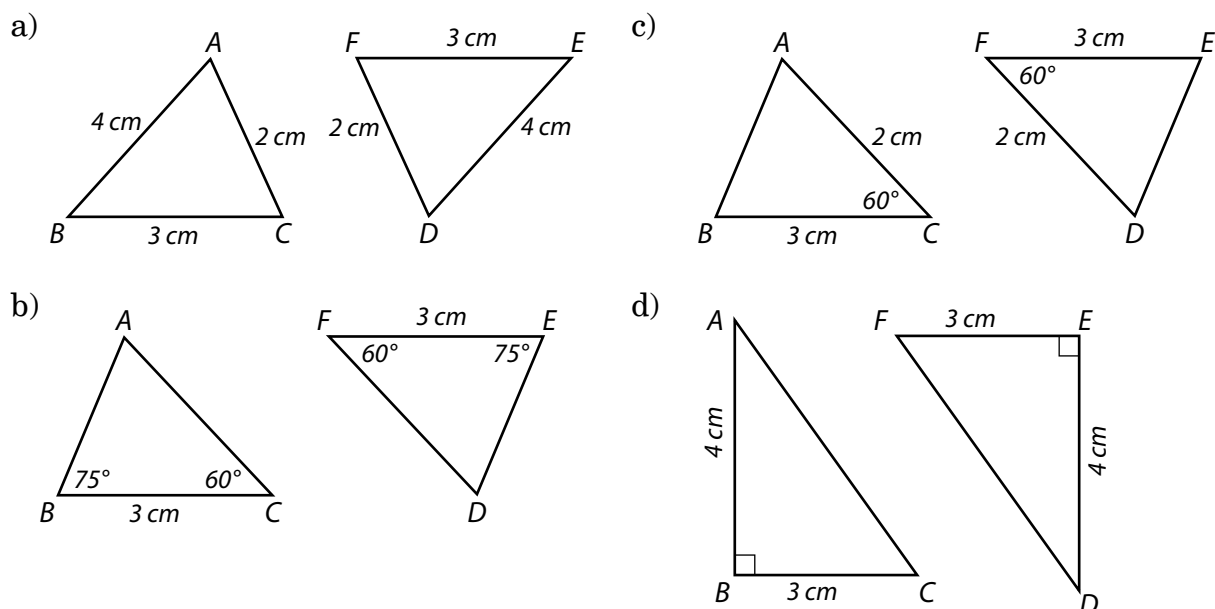


$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

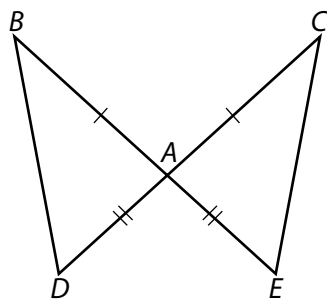
- 1) $AB = A_1B_1$
- 2) $BC = B_1C_1$
- 3) $CA = C_1A_1$

8. Trijstūris ABC ir vienāds ar trijstūri DEF. Uzzīmē trijstūrus un atzīmē vienādos leņķus un malas!

9. Nosaki, vai dotie trijstūri ir vienādi! Vienādiem trijstūriem uzraksti vienādības pazīmi!



- ☒ Doti divi trijstūri $\triangle ABD$ un $\triangle ACE$ un tiem ir vienādas malas $AB = AC$, $AD = AE$ (skat. 4. att.). Lai pierādītu, ka $BD = CE$, rīkojas šādi:



Dots. $\triangle ABD$ un $\triangle ACE$, $AB = AC$, $AD = AE$.

Pierādīt. $BD = CE$.

Pierādījums

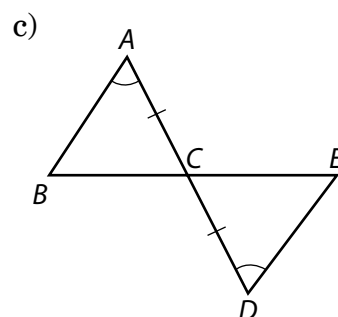
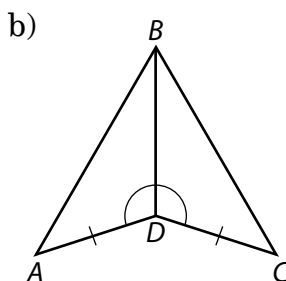
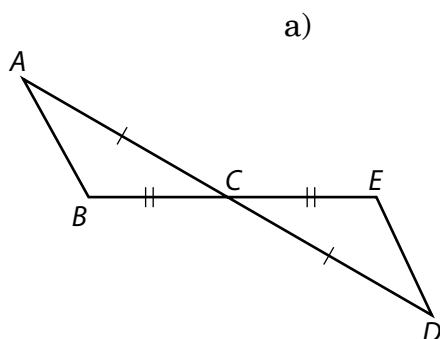
Trijstūros $\triangle ABD$ un $\triangle ACE$ ir:

- 1) $AB = AC$;
- 2) $AD = AE$;
- 3) $\angle BAD = \angle CAE$, jo tie ir krustleņķi, bet krustleņķi ir vienādi.

Tātad $\triangle ABD = \triangle ACE$ (*mlm*).

Vienādiem trijstūriem atbilstošās malas ir vienādas, tātad $BD = CE$.

10. Nosaki vienādo trijstūru pārus, atbilde pamato, izmantojot trijstūru vienādības pazīmes!



11. Uzzīmē kvadrātu ABCD! Novelc tā diagonāles AC un BD! Atrodi zīmējumā vienādus trijstūrus un pierādi, ka tie ir vienādi!

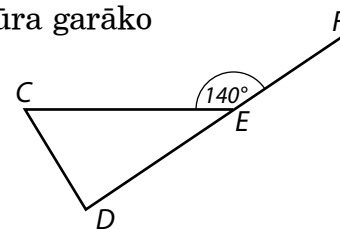
Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Trijstūrī CDE nosaki malas DE pretleņķi!
- (1 p.) 2. Trijstūra viduslīnija ir 4 cm. Aprēķini malas garumu, kurai viduslīnija ir paralēla!
- (2 p.) 3. Vai ir trijstūris, kura malas ir 3 cm, 4 cm, 5 cm garas? Atbilde pamato!
- (2 p.) 4. Aprēķini trijstūra leņķus, ja to lielumu attiecība ir 2 : 4 : 4!
- (2 p.) 5. Vienādsānu trijstūra pamats ir 10 cm, bet perimetrs P ir 24 cm. Aprēķini trijstūra sānu malas garumu!

(2 p.) 6. Trijstūrī ABC $\angle A = 70^\circ$ un $\angle B = 50^\circ$. Nosaki trijstūra garāko un īsāko malu!

(2 p.) 7. Vienādsānu trijstūrī leņķis pie pamata ir 45° .
Aprēķini pārējos trijstūra leņķus!
Nosaki trijstūra veidu!

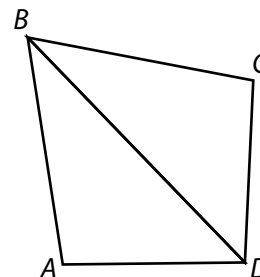


(2 p.) 8. a) Aprēķini trijstūra DEC leņķu D un C summu, ja leņķa E ārējais leņķis CEF ir 140° !

b) Izpēti zīmējumu! Aprēķini trijstūra nezināmos leņķus!

(3 p.) 9. Vienādmalu trijstūrī novilkta divas mediānas. Kādu leņķi tās veido krustojoties?

(3 p.) 10. Pierādi, ka zīmējumā redzamie trijstūri ir vienādi, ja zināms, ka $AB = CB$, $AD = CD$!



13. Kvadrātsaknes jēdziens

- ✓ Vienādojumā $x^2 = 4$ nezināmā x vietā var ievietot skaitli 2 un -2 , jo $2^2 = 4$ un $(-2)^2 = 4$.

Lai atrisinātu šo vienādojumu, jāveic darbība, kas ir pretēja kāpināšanai kvadrātā. Šī darbība ir **kvadrātsaknes izvilkšana** jeb **kvadrātsaknes aprēķināšana**.



Skaitļa **kvadrātsakne** ir skaitlis, kura kvadrāts ir vienāds ar doto skaitli.

Sakni no negatīva skaitļa izvilkt nevar!

- ✓ Kvadrātsakne no 9 ir -3 un 3 , jo $3^2 = 9$ un $(-3)^2 = 9$
- ✓ kvadrātsakne no $\frac{36}{49}$ ir $\frac{6}{7}$ un $-\frac{6}{7}$, jo $\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$ un $\left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49}$
- ✓ kvadrātsakni no -25 izvilkt nevar, jo $5^2 = 25$ un arī $(-5)^2 = 25$



saknes zīme
 $\sqrt{16}$
zemsaknes izteiksme

1. Risini galvā!

a) $x^2 = 16$

c) $x^2 = \frac{9}{25}$

e) $2x^2 = 18$

b) $x^2 = 0$

d) $x^2 = 1,21$

f) $x^2 = -36$

Skaitļa aritmētiskā kvadrātsakne, tās īpašības



Aritmētiskā kvadrātsakne no skaitļa a ir nenegatīvs skaitlis (t. i., pozitīvs vai nulle), kura kvadrāts ir vienāds ar skaitli a . To apzīmē ar $\sqrt{a}$ un lasa: „aritmētiskā kvadrātsakne no a ” vai vienkārši: „sakne no a ”.



Kvadrātsakņu īpašības

① $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

② $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

③ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

④ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

⑤ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

✓ $\sqrt{121} = 11$;

✓ $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

- ✓ $\sqrt{-15}$ nevar aprēķināt, jo sakni no negatīva skaitļa izvilkt nevar.

- ✓ Izteiksmei $\sqrt{x-1}$ ir jēga, ja $x-1$ ir pozitīvs skaitlis vai nulle, tāpēc jāatrisina nevienādība:

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 0 + 1$$

$$x \geq 1 \rightarrow x \in [1; +\infty)$$

2. Nosaki, ar kādām mainīgā x vērtībām izteiksmes ir definētas!

- a) $\sqrt{x+1}$ c) $\sqrt{2-x}$ e) $\sqrt{2x+4}$
 b) $\sqrt{x-3}$ d) $\sqrt{5+x}$ f) $\sqrt{x^2+1}$

☑ $\sqrt{2} = 1,414213\dots$, $\sqrt{3} = 1,732050\dots$; $\sqrt{5} = 2,236067\dots$

Šie skaitļi ir **iracionālie skaitļi**.

3. No skaitļiem $\sqrt{36}$; $\sqrt{37}$; $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{0,09}$; $0,(7)$; $1\frac{2}{3}$ izraksti visus iracionālos skaitļus!

☒ ❶ $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$

❷ $\sqrt{64 \cdot 25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{25} = 8 \cdot 5 = 40$

❸ $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

❹ $\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$

❺ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{2}{72}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$

Risinot uzdevumus, izmanto vairākas kvadrātsakņu, pakāpju īpašības un saīsinātās reizināšanas formulas!



☑ $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$

☑ $\sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{(25-24) \cdot (25+24)} = \sqrt{1 \cdot 49} = \sqrt{49} = 7$

☑ $(2 + \sqrt{3})^3 = 2^3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4. Aprēķini! Ievēro darbību secību!

a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

e) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$

i) $(-4\sqrt{3})^2$

m) $\frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{6}}$

r) $\sqrt{41^2 - 40^2}$

b) $\sqrt{0,36}$

f) $-2\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}$

j) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{2100}}$

n) $\sqrt{8^2 + 6^2}$

s) $(1 + \sqrt{2})^2$

c) $\sqrt{9 \cdot 4 \cdot 0,25}$

g) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$

k) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$

o) $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$

t) $(\sqrt{3} - 2)^2$

d) $2\sqrt{1,21} - \frac{1}{5}\sqrt{9}$

h) $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2$

l) $\frac{\sqrt{3}\sqrt{15}}{3\sqrt{5}}$

p) $(\sqrt{11} - \sqrt{2})(\sqrt{11} + \sqrt{2})$

u) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

- ☑ Lai noteiktu nezināmo x vienādojumā $\sqrt{x} = 4$, skaitlis 4 jākāpina kvadrātā. To pieraksta šādi: $x = 4^2 = 16$.

Pārbaude. $\sqrt{16} = 4$.

5. Aprēķini nezināmo skaitli! Ieraksti atbilstošo burtu atbilžu skalā! Ja atrisinājums būs pareizs, iegūsi vitamīna nosaukumu:

$\sqrt{x} = \frac{2}{3}$ (n)	$\sqrt{x} = 5$ (s)	$\sqrt{x-1} = 3$ (a)	$\frac{21}{\sqrt{x}} = 3$ (k)
$\sqrt{x} + 2 = 4$ (o)	$\sqrt{x} - 1 = 0$ (t)	$2\sqrt{x} = 8$ (i)	$\sqrt{3x} = 9$ (r)

Atbilžu skala

49	10	27	4	1	16	$\frac{4}{9}$	25

Līdzīgas kvadrātsaknes



Līdzīgas kvadrātsaknes ir kvadrātsaknes ar vienādām zemsaknes izteiksmēm.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} + \sqrt{2} &\neq \sqrt{5} \\ \sqrt{8} - \sqrt{2} &\neq \sqrt{6}\end{aligned}$$

Kvadrātsaknes $2\sqrt{3}$ un $-5\sqrt{3}$ ir līdzīgas, jo abām ir vienāds zemsaknes skaitlis 3. Kvadrātsaknes $0,5\sqrt{a}$ un $\frac{1}{3}\sqrt{b}$ nav līdzīgas, jo tām ir dažādas zemsaknes izteiksmes a un b .

Saskaitīt un atņemt drīkst tikai līdzīgas kvadrātsaknes.

☑ $\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

☑ $6\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} = (6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}) + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

6. Aizpildi tabulu:

	$a \cdot b$	$a : b$	$a + b$	$a - b$	a^2	b^2
$a = \sqrt{7}, b = 2$						
$a = b = 4\sqrt{3}$						
$a = 3\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$						
$a = 4\sqrt{5}, b = 2\sqrt{5}$						
$a = \sqrt{7}, b = 2\sqrt{7}$						

7. Kvadrāta malas garums ir $2\sqrt{3}$ cm, bet taisnstūra garums $\sqrt{3}$ cm un platums 2 cm. Kuras figūras perimetrs un laukums ir lielāks? Pieļauj, ka $\sqrt{3} = 1,7$.

Reizinātāja iznešana pirms saknes zīmes

Sakni $\sqrt{50}$ nevar izskaitļot galvā, bet to var pārveidot un aprēķināt vērtību. To dara šādi:

→ zemsaknes skaitli sadala reizinātājos tā, lai no viena reizinātāja

$$\text{varētu izvilkt sakni} \rightarrow \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2}$$

→ uzraksta kvadrātsakni no reizinājuma kā sakņu reizinājumu

$$\rightarrow \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$$

→ izvelk kvadrātsakni no tā reizinātāja, kur tas ir iespējams

$$\rightarrow \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$$

→ uzraksta iegūto skaitļa un saknes reizinājumu $\rightarrow 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Šādu darbību sauc par **reizinātāja iznešanu pirms saknes zīmes**. To izmanto, vienkāršojot izteiksmes ar saknēm, kurām ir atšķirīgas zemsaknes izteiksmes.

$$\checkmark \sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\checkmark \sqrt{12} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{27} = \sqrt{4 \cdot 3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{9 \cdot 3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

8. Savieno piemēru ar pareizo atbildi! Sejiņu ☹ savieno ar to sakni, kuru pārveidot nav iespējams!

Piemērs	$\sqrt{15}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{24}$	$\sqrt{120}$
Atbilde	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$	☹	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{30}$	☹	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$

9. Vienkāršo izteiksmes! Izmanto sakņu īpašības!

a) $\sqrt{54} - \sqrt{6}$

b) $\sqrt{15} + \sqrt{60}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{54} - \sqrt{24}$

d) $0,5\sqrt{12} - \frac{1}{4}\sqrt{48}$

e) $-3\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

f) $(\sqrt{12} + \sqrt{27}) \cdot \sqrt{3}$

g) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} + \sqrt{84}$

h) $(\sqrt{6} - 2)(3 + \sqrt{2})$

j) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}{9}$

k) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{12}}{2\sqrt{20}}$

i) $(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - \sqrt{120}$

l) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

☒ Izteiksme $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ir identitāte, jo

$$\begin{aligned}\sqrt{8} - \sqrt{2} &= \sqrt{4-2} - \sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

☒ izteiksme $\sqrt{100} - \sqrt{81} = \sqrt{1}$ ir identitāte, jo $\sqrt{100} - \sqrt{81} = 10 - 9 = 1$, bet $\sqrt{1} = 1$

☒ izteiksme $\sqrt{5} + \sqrt{9} = \sqrt{14}$ nav identitāte, to pārbauda, izmantojot kalkulatoru.

10. Pārbaudi, vai vienādības ir pareizas! Ja rodas grūtības, izmanto kalkulatoru!

a) $\sqrt{4} + \sqrt{5} = \sqrt{9}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

g) $\sqrt{36} - \sqrt{4} = \sqrt{32}$

b) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$

e) $\sqrt{16} - \sqrt{25} = -1$

h) $\sqrt{72} - \sqrt{8} = \sqrt{32}$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$

f) $\sqrt{6} + \sqrt{6} = \sqrt{24}$

i) $\sqrt{80} - \sqrt{5} = \sqrt{45}$

Reizinātāja ienešana zem saknes zīmes

Darbība, kas ir pretēja reizinātāja iznešanai pirms saknes zīmes, ir **reizinātāja ienešana zem saknes zīmes**.

☒ Lai ienestu reizinātāju zem saknes zīmes izteiksmē $3\sqrt{7}$, rīkojas šādi:

→ skaitlisko reizinātāju pārveido par kvadrātsakni no skaitļa kvadrāta

$$\rightarrow 3\sqrt{7} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7}$$

→ uzraksta kvadrātsakņu reizinājumu $\rightarrow \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7}$

→ pārveido kvadrātsakņu reizinājumu par kvadrātsakni no reizinājuma $\rightarrow \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7}$

→ sareizina skaitļus zem kvadrātsaknes $\rightarrow \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$

☒ Lai noteiktu, starp kādiem veseliem skaitļiem atrodas skaitlis $\sqrt{7}$, rīkojas šādi:

→ nosaka par 7 mazāko skaitli, kuram var noteikt kvadrātsakni
 $\rightarrow \sqrt{4} = 2$

→ nosaka par 7 lielāko skaitli, kuram var noteikt kvadrātsakni
 $\rightarrow \sqrt{9} = 3$

→ secina, ka $\rightarrow \sqrt{7}$ atrodas starp skaitļiem 2 un 3.

11. Uz skaitļu ass starp veseliem skaitļiem (skat. 1. att.) izvieto saknes

$$\sqrt{20}, \sqrt{33}, 2\sqrt{7}, 3\sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\sqrt{3}!$$



1. att.

☒ Lai salīdzinātu $2\sqrt{7}$ un $\sqrt{26}$, izmanto reizinātāja ienešanu zem sak-

$$\text{nes zīmes. } 2\sqrt{7} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{28}$$

$$\sqrt{28} > \sqrt{26}, \text{ tātad } 2\sqrt{7} > \sqrt{26}.$$

12. No diviem skaitļiem izvēlies un nosaki lielāko skaitli! Tam atbilstošo burtu ieraksti ar bultiņu norādītajā vietā atbilžu skalā! Ja visu būsī paveicis pareizi, tad atbilžu skalā izlasīsī matemātiskas darbības nosaukumu angļu valodā.

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6\frac{1}{3}}$	$\sqrt{6,2}$	7	$\sqrt{50}$	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{26}$	$5\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$	$2\sqrt{7}$	7	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{21}$
m	a	d	u	t	d	i	e	t	r	t	i	e	o

Atbilžu skala

													n
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

Sakne saucējā

Paņēmienu, kad atbrīvojas no saknes saucējā, sauc par daļas **atbrīvošanu no iracionalitātes** (ar vārdu „iracionalitāte” norāda uz kvadrātsakni).

☒ Lai izteiksmē $\frac{25}{\sqrt{5}}$ atbrīvotos no kvadrātsaknes saucējā, rīkojas šādi:

→ daļas skaitītājs un saucējs jāpareizina ar tādu pašu sakni kā saucējā

$$\rightarrow \frac{25}{\sqrt{5}} = \frac{25 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

→ izpilda darbības ar saknēm $\rightarrow \frac{25 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{25\sqrt{5}}{5}$

→ ja ir iespējams, daļu saīsina $\rightarrow \frac{25\sqrt{5}}{5} = \frac{5\sqrt{5}}{1} = 5\sqrt{5}$

$$\checkmark \frac{15}{4\sqrt{6}} = \frac{15 \cdot \sqrt{6}}{4\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{15\sqrt{6}}{4 \cdot 6} = \frac{15\sqrt{6}}{24} = \frac{5\sqrt{6}}{8}$$

$$\checkmark \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6}$$

$$\checkmark \frac{3}{\sqrt{1+x}} = \frac{3 \cdot \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{3\sqrt{1+x}}{1+x}$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{5}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3 - 5 = -2$$



$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$



☒ Ja daļas saucējā ir summa vai starpība,
kas satur kvadrātsakni, piemēram, $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$, tad rīkojas šādi:

➔ daļas skaitītājs un saucējs jāpareizina ar izteiksmi kā saucējā, tikai
šajā izteiksmē otrajam loceklim ir pretēja zīme

$$\rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot (1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{3})}$$

➔ izpilda nepieciešamās darbības ar saknēm

$$\rightarrow \frac{1 \cdot (1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} = \frac{1-\sqrt{3}}{-2}$$

➔ ja ir iespējams, daļu saīsina

$$\checkmark \quad \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2-6} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-2}$$

$$\checkmark \quad \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} = \frac{(\sqrt{2}-2) \cdot (\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2) \cdot (\sqrt{2}-2)} = \frac{(\sqrt{2}-2)^2}{(\sqrt{2})^2 - 2^2} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 2^2}{2-4} =$$

$$= \frac{2-4\sqrt{2}+4}{-2} = \frac{6-4\sqrt{2}}{-2} = \frac{-2(-3+2\sqrt{2})}{-2} = \frac{-3+2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}-3$$

13. Atbrīvo daļas no saknes saucējā!

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

g) $\frac{2}{1-\sqrt{7}}$

j) $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

e) $\frac{2}{\sqrt{x+2}}$

h) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

k) $\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

f) $\frac{x}{\sqrt{2-x}}$

i) $-\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

l) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

(1 p.) 1. Aprēķini $\sqrt{\frac{16}{25}}$!

(2 p.) 2. Aprēķini $(2\sqrt{5})^2$!

(2 p.) 3. Aprēķini $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12,5}$!

(2 p.) 4. Pamato, vai izteiksme $\sqrt{21} - \sqrt{15} = \sqrt{6}$ ir identitāte!

(2 p.) 5. Norādi, starp kādiem veseliem skaitļiem atrodas $\sqrt{17}$!

(2 p.) 6. Aprēķini $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$!

(2 p.) 7. Pamato, vai izteiksme $\sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{27}$ ir identitāte!

(3 p.) 8. Aprēķini $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$!

(2 p.) 9. Vienkāršo $2\sqrt{a} - 3\sqrt{b} + 4\sqrt{a} - \sqrt{b}$!

(2 p.) 10. Atbrīvo daļu $\frac{2}{\sqrt{7}}$ no saknes saucējā!

14. Algebriskās daļas, darbības ar tām

☒ „Laimas” veikalā pārdevējai jāiesaiņo 120 dāvanas.

Cik stundas viņai jāsaīņo dāvanas, ja stundā viņa var iesaiņot 20 dāvanas? Cik ilgi jāsaīņo, ja stundā iesaiņos 30; 40; k dāvanas?

Rezultāti apkopoti tabulā:

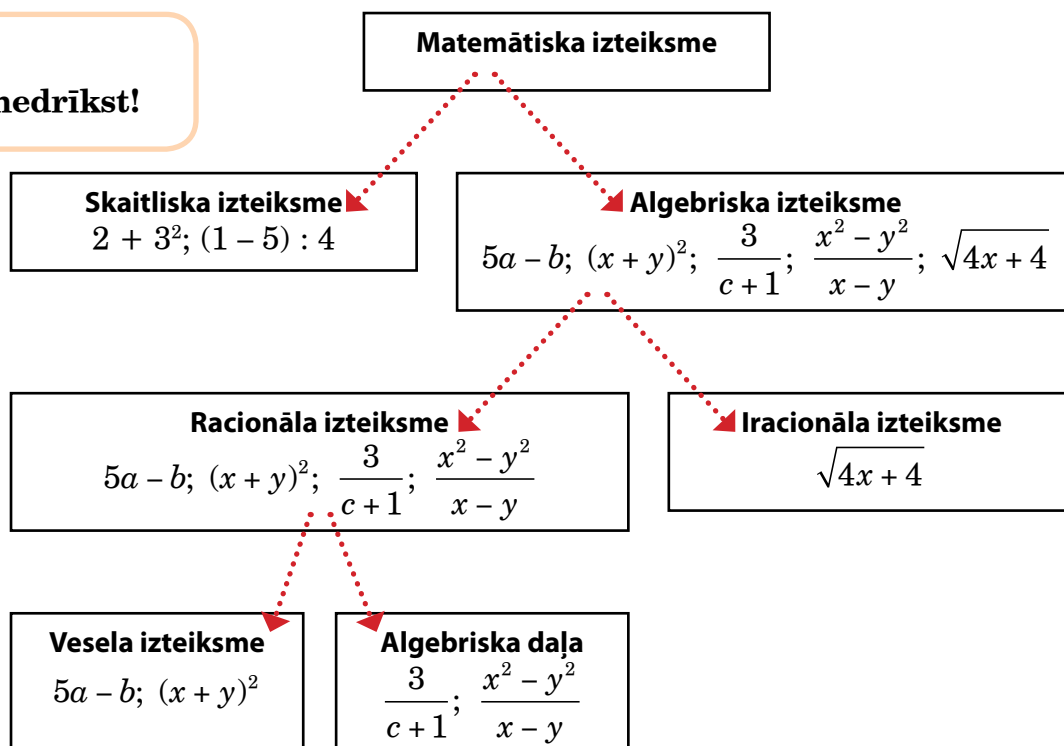
Stundā iesaiņoto dāvanu skaits	20	30	40	k
Stundu skaits	6	4	3	$\frac{120}{k}$

Daļveida izteiksme $\frac{120}{k}$ izsaka sakarību starp stundu skaitu un paveikto darbu.

Ja palielinās iesaiņoto dāvanu skaits k , tad samazinās darbam nepieciešamo stundu skaits un otrādi – ja samazinās k , palielinās stundu skaits.



Dalīt ar 0 nedrīkst!



Algebriskās daļas **definīcijas apgabals** ir visas tās mainīgā vērtības, kurām **daļas saucējs nav vienāds ar 0**. Izpildot darbības ar algebriskām daļām, parasti pieņem, ka visas darbības tiek veiktas šo daļu definīcijas apgabalā.

Daļas pamatīpašība

Algebriskās daļas **vērtība nemainās**, ja tās **skaitītāju un saucēju reizina vai dala ar vienu un to pašu izteiksmi**, kuras vērtība nav 0.



☑ $\frac{5x}{x+1} = \frac{5x \cdot x}{(x+1) \cdot x} = \frac{5x^2}{x^2+x}$ daļas skaitītājs un saucējs ir **reizināts ar x** , izmantojot **papildreizinātāju**.

☑ $\frac{(x+2)(x-1)}{3x(x+2)} = \frac{(x+2)(x-1):(x+2)}{3x(x+2):(x+2)} = \frac{\overset{1}{(x+2)}(x-1)}{3x\overset{1}{(x+2)}} = \frac{x-1}{3x}$ daļas skaitītājs un saucējs ir **dalīts ar izteiksmi $(x+2)$** , t. i., daļa ir **saīsināta** ar $(x+2)$.

Lai saīsinātu algebrisku daļu, rīkojas šādi:

→ daļas skaitītāju un saucēju **sadala reizinātājos**

$$\rightarrow \frac{5x^2 + 20x}{x^2 - 16} = \frac{5x \cdot (x+4)}{(x-4) \cdot (x+4)}$$

• iznesot kopīgo reizinātāju pirms iekavām vai

• izmantojot saīsinātās reizināšanas formulas, vai

• izmantojot grupēšanas paņēmieni;

→ **atrod kopīgo reizinātāju** skaitītājā un saucējā

$$\rightarrow (x+4)$$

→ skaitītāju un saucēju **izdala** ar kopīgo reizinātāju

$$\rightarrow \frac{5x \cdot \overset{1}{(x+4)}}{(x-4) \cdot \overset{1}{(x+4)}} = \frac{5x}{x-4}$$

$$\text{☑ } \frac{x^2 - 49}{3x^2 + 21x} = \frac{(x-7)\overset{1}{(x+7)}}{3x\overset{1}{(x+7)}} = \frac{x-7}{3x}$$



$$\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B} \quad \frac{A : B}{B : D} = \frac{A}{B}$$

1. Saīsini daļas!

$$\text{a) } \frac{15ax}{5ax^2} \quad \text{b) } \frac{b^2 - 25}{ab - 5a} \quad \text{c) } \frac{x+3}{x^2 + 6x + 9} \quad \text{d) } \frac{2a^2 - 2}{a^2 - 2a + 1} \quad \text{e) } \frac{mn^3 - mn^2}{mn^2 - mn}$$

Daļas vērtība nemainās, ja vienlaikus maina zīmes uz pretējām

→ daļas skaitītājam un saucējam $\rightarrow \frac{-A}{-B} = \frac{A}{B}$;

→ daļas skaitītājam un visai daļai $\rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{-A}{B}$ vai $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$;

→ visai daļai un daļas saucējam $\rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{A}{-B}$ vai $-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$.



$$A \cdot (-1) = -A$$

A un $(-A)$ sauc par **pretējām** izteiksmēm.

$$A + (-A) = 0$$

$$\frac{A}{B} = \begin{matrix} \nearrow -\frac{A}{B} \\ \rightarrow -\frac{A}{-B} \\ \searrow \frac{-A}{-B} \end{matrix}$$

Doto daļu var uzrakstīt vēl trīs dažādos veidos!

$$\frac{2m-n}{x} = -\frac{2m-n}{-x} = -\frac{n-2m}{x} = \frac{n-2m}{-x}$$

2. Uzraksti katru daļu trīs veidos, mainot zīmes!

a) $-\frac{4a}{x-9}$ b) $\frac{x+7}{-7m}$ c) $-\frac{1-x}{x+1}$ d) $\frac{-a-b}{c+d}$

Šādi vienkāršo izteiksmes:

$$\checkmark \frac{-a}{a^2-5a} = \frac{-a}{a(a-5)} = \frac{\overset{1}{-a}}{\underset{1}{a}(5-a)} = \frac{1}{5-a}$$

$$\checkmark \frac{9-x^2}{x^2-3x} = \frac{(3-x)(3+x)}{x(x-3)} = \frac{-(\overset{1}{x-3})(3+x)}{x(\underset{1}{x-3})} = -\frac{3+x}{x}$$

Daļu reizināšana un kāpināšana



Daļu kāpināšanu var aizvietot ar reizināšanu.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

Šādi sareizina daļas un rezultātu saīsina:

$$\frac{a^2-ab}{3x} \cdot \frac{12x^2}{b^2-a^2} = \frac{a \cdot \overset{-1}{(a-b)} \cdot \overset{4x}{12x^2}}{\underset{1}{3x} \cdot \underset{1}{(b-a)}(b+a)} = \frac{-4ax}{b+a} = \frac{4ax}{a+b}$$

3. Sareizini daļas un saīsini rezultātu!

a) $\frac{2x^4}{7y^4} \cdot \frac{21y^6}{8x^5}$ b) $\frac{x^2 - y^2}{c^2 - d^2} \cdot \frac{c + d}{x - y}$ c) $\frac{5}{5 - b} \cdot \frac{75 - 3b^2}{b + 5}$ d) $\frac{2}{m + n} \cdot \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4}$

Daļu dalīšana



☒ Šādi izdala daļas un saīsina rezultātu:

$$\frac{x - 3}{x + 4} : \frac{5x - 15}{x^2 + 8x + 16} = \frac{x - 3}{x + 4} \cdot \frac{(x + 4)^2}{5(x - 3)} = \frac{\overset{1}{\cancel{x - 3}} \cdot \overset{x+4}{\cancel{(x + 4)^2}}}{\underset{1}{\cancel{(x + 4)}} \cdot 5 \cdot \underset{1}{\cancel{(x - 3)}}} = \frac{x + 4}{5}$$

$$\frac{M}{N} : \frac{A}{B} = \frac{M}{N} \cdot \frac{B}{A} = \frac{M \cdot B}{N \cdot A}$$

4. Izdali daļas un saīsini rezultātu!

a) $\frac{8b^2}{a^3} : \frac{16b}{a^2}$ b) $\frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2} : \frac{a - b}{n + m}$ c) $\frac{x^2 - y^2}{c^2 - d^2} : \frac{3(x + y)}{c - d}$ d) $\frac{xy^3}{x + y} : \frac{x^3y}{4(x + y)^2}$

☒ Lai aprēķinātu izteiksmes vērtību, ja $c = 1$, $d = -2$, izdala daļas, saīsina rezultātu šādi:

$$\frac{18d^2}{5c} : \frac{9d}{10c^3} = \frac{18\overset{2d}{\cancel{d^2}} \cdot \overset{2c^2}{\cancel{10c^3}}}{\underset{1}{\cancel{5c}} \cdot \underset{1}{\cancel{9d}}} = \frac{2d \cdot 2c^2}{1} = 4c^2d = 4 \cdot 1^2 \cdot (-2) = -8$$

5. Vienkāršo izteiksmi un aprēķini tās vērtību, ja $a = 6$!

$$\frac{a + 4}{4a} : \frac{(4 + a)^3}{48a} \cdot \frac{a^2 \cdot 16}{a}$$



Daļu saskaitīšana un atņemšana

Šādi saskaita vai atņem daļas un saīsina, ja tas ir iespējams:

☒ $\frac{4}{x + 1} + \frac{4x}{x + 1} = \frac{4 + 4x}{x + 1} = \frac{4\overset{1}{\cancel{(1 + x)}}}{\underset{1}{\cancel{x + 1}}} = \frac{4}{1} = 4$

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S} = \frac{A + B}{S}$$

$$\frac{A}{S} - \frac{B}{S} = \frac{A - B}{S}$$

Lai vienādotu saucējus, izmanto daļas pamatīpašību. Pēc tam daļas atņem un saīsina.

☒ $\frac{y^2}{y - 1} + \frac{1}{1 - y} = \frac{y^2}{y - 1} - \frac{1}{y - 1} = \frac{y^2 - 1}{y - 1} = \frac{\overset{1}{\cancel{(y - 1)}}(y + 1)}{\underset{1}{\cancel{y - 1}}} = y + 1$

Lai algebriskās daļas saskaitītu un atņemt, ja to saucēji ir dažādi, rīkojas šādi:

→ ja iespējams, daļu saucējus sadala reizinātājos

$$\rightarrow \frac{a + 5}{a^2 + ab} - \frac{b - 5}{b^2 + ab} = \frac{a + 5}{a(a + b)} - \frac{b - 5}{b(b + a)} =$$

→ atrod daļu kopsaucēju → $ab(a+b)$

→ paplašina daļas, lai to saucēji būtu vienādi ar kopsaucēju

$$\rightarrow = \frac{a+5^{(b)}}{a(a+b)} - \frac{b-5^{(a)}}{b(b+a)} = \frac{b(a+5) - a(b-5)}{ab(a+b)} =$$

→ saskaita vai atņem daļu skaitītājus, kopsaucēju nemainot,

$$\rightarrow = \frac{ab+5b-ab+5a}{ab(a+b)} =$$

$$\rightarrow \text{skaitītājā savēl līdzīgos locekļus} \rightarrow = \frac{5b+5a}{ab(a+b)} =$$

→ ja iespējams, skaitītāju sadala reizinātājos un daļu saīsina

$$\rightarrow = \frac{5 \overset{1}{\cancel{(b+a)}}}{ab \underset{1}{\cancel{(a+b)}}} = \frac{5}{ab}$$

$$\boxed{\checkmark} \frac{m^{(m-n)}}{m+n} - \frac{n^{(m+n)}}{m-n} = \frac{m(m-n) - n(m+n)}{(m+n)(m-n)} = \frac{m^2 - mn - nm - n^2}{(m+n)(m-n)} = \frac{m^2 - 2mn - n^2}{(m+n)(m-n)}$$

6. Saskaiti vai atņem daļas!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{a}{a+2} + \frac{a}{a-2} & \text{c) } \frac{7x-30x^2}{5x-1} + \frac{12x}{2} & \text{e) } \frac{c-d}{c+d} - \frac{c+d}{c-d} \\ \text{b) } \frac{am+bn}{m^2-n^2} - \frac{a-b}{n+m} & \text{d) } \frac{(a-b)^2}{a+b} - \frac{(b-a)^2}{b+a} & \text{f) } \frac{-12}{9-b^2} + \frac{2}{b+3} \end{array}$$

7. Vienkāršo izteiksmi!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x+3}{x-3} \cdot \left(\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \right) & \text{c) } \frac{y-z}{x+y} + \frac{y-z}{x-z} : \frac{y^2-x^2}{x^2-z^2} \\ \text{b) } \frac{2a-b}{ab} - \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) & \text{d) } \frac{a+4}{8-3a} \cdot \left(\frac{a-1}{a+4} - \frac{a-3}{a-4} \right) \end{array}$$

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

(1 p.) 1. No izteiksmēm $3x + 1$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{x-5}$ algebriskā daļa ir _____.

(1 p.) 2. Turpini teikumu: „Izteiksmei $\frac{2}{x+7}$ nav jēgas, ja $x = \underline{\hspace{1cm}}$ ”

(1 p.) 3. Turpini likumu par daļas zīmju maiņu: $-\frac{x}{2x-3} = \frac{-x}{2x-3} =$

(2 p.) 4. Sareizini daļas $\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{x+1}$!

(2 p.) 5. Saīsini daļu $\frac{15ax}{5ax^2}$!

(2 p.) 6. Saīsini daļu $\frac{d^2-1}{d+1}$!

(2 p.) 7. Atņem daļas $\frac{6}{1-n} - \frac{6n}{1-n}$ un rezultātu saīsini!

(3 p.) 8. Saskaiti daļas $\frac{25}{5-b} + \frac{b^2}{b-5}$ un rezultātu saīsini!

(3 p.) 9. Izdali daļas $\frac{x^2-y^2}{c-d} : \frac{x+y}{c-d}$!

(3 p.) 10. Vienkāršo izteiksmi $\frac{10x-30x^2}{3x-1}$ un aprēķini tās vērtību, ja $x = -0,1$!

15. Apgrieztā proporcionalitāte. Ievads nelineāro sistēmu risināšanā

- ☒ Ģimene nolēma vienā dienā iestādīt augļu dārzu. Viņi nopirka 120 stādus. Ja viens cilvēks iestādīs 10 stādus, tad vajadzēs 12 cilvēkus, lai darbu paveiktu vienā dienā. Ja katrs iestādīs 12 stādus, vajadzēs 10 cilvēkus. Ja katrs iestādīs 15 stādus, vajadzēs 8 cilvēkus utt.

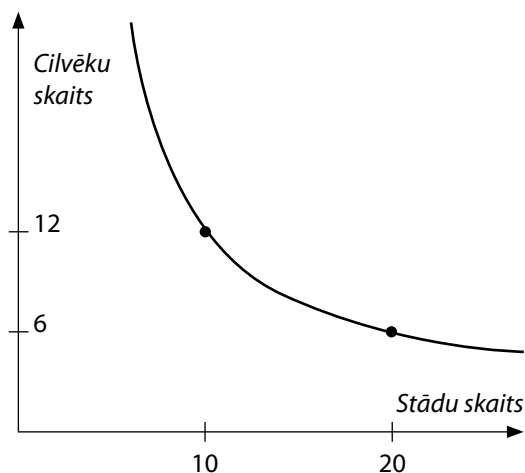
Aprēķinus var atspoguļot tabulā šādi:

Viena cilvēka iestādīto stādu skaits	10	12	15	20	30	40
Darbā iesaistīto cilvēku skaits	12	10	8	6	4	3

Tabulā redzamo **sakarību** starp dienā iestādīto stādu skaitu un darba veikšanai nepieciešamo cilvēku skaitu var attēlot grafiski.



Sakarību, kurā pozitīvam neatkarīgajam mainīgajam palielinoties, pozitīvais atkarīgais mainīgais tikpat reižu samazinās, sauc par apgriezto proporcionalitāti.



No tabulas redzams, ka **palielinoties** iestādīto **stādu skaitam**, **samazinās** darbā iesaistīto **cilvēku skaits**.

Šos lielumus sauc par **apgriežti proporcionāliem lielumiem**.

Apgriežti proporcionāli lielumi, piemēram, ir:

- ☒ kustības ātrums un kustības laiks;
- ☒ preces cena un preču daudzums, ko var nopirkt par noteiktu naudas summu;
- ☒ degvielas patēriņš un attālums, ko var nobraukt ar doto degvielas daudzumu.

1. Atzīmē četrstūrī ar „+” piemērus, kuros ir apgriežti proporcionāli lielumi!

- ☐ a) Ja saldējuma cena ir 20 santīmi, tad Jānis var nopirkt 5 saldējumus. Cik saldējumus viņš varēs nopirkt par to pašu naudu, ja saldējuma cena būs 25 santīmi?
- ☐ b) Taisnstūra laukums ir 60cm^2 , bet tā garums ir 10cm. Kā mainīsies taisnstūra platums, ja garumu palielinās 2 reizes, bet laukumu nemainīs?

- ☐ c) Ja pakā ir 100 rakstāmpapīra lapu, tad pakas biezums ir 1,5cm. Cik cm bieza būs papīra paka, kurā ir 500 tādu pašu lapu?
- ☐ d) Motocikla benzīna bāka, kuras tilpums ir 20 litri, ir pilna. Cik km var nobraukt motocikls, ja benzīna patēriņš ir 5 litri uz 100km? Cik km nobrauks, ja 100km braucienam nepieciešami 4 litri benzīna?

Sakarību $y = \frac{k}{x}$, kur $k \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$ sauc par **apgrieztās proporcionalitātes funkciju**.

x ir neatkarīgais mainīgais jeb **arguments**, y ir atkarīgais mainīgais jeb **funkcijas vērtība**.

k ir skaitlis, kuru sauc par **proporcionalitātes koeficientu**.



2. Kura no funkcijām ir apgrieztā proporcionalitāte?

- a) $y = 2x$ b) $y = \frac{2}{x}$ c) $y = \frac{x}{2}$ d) $y = x + 2$

Apagrieztās proporcionalitātes funkcijas **grafiku** sauc par **hiperbolu**, ja $k > 0$, hiperbolas zari atrodas I un III kvadrantā un tā ir **dilstoša** funkcija (1. att. $k = 3$), ja $k < 0$, hiperbolas zari atrodas II un IV kvadrantā un tā ir **augoša** funkcija (2. att. $k = -2$).



Lai uzzīmētu funkcijas $y = \frac{k}{x}$ grafiku, rīkojas šādi:

- ➔ izvēlas gan negatīvas, gan pozitīvas x vērtības ($x \neq 0$),
- ➔ aprēķina atbilstošās y vērtības un sastāda vērtību tabulu,
- ➔ koordinātu plaknē atliek punktus, kuru koordinātas ir skaitļu pāri no vērtību tabulas,
- ➔ caur punktiem novelk liektas līnijas, kuras tuvojas Ox un Oy asīm, tās nekrustojot.

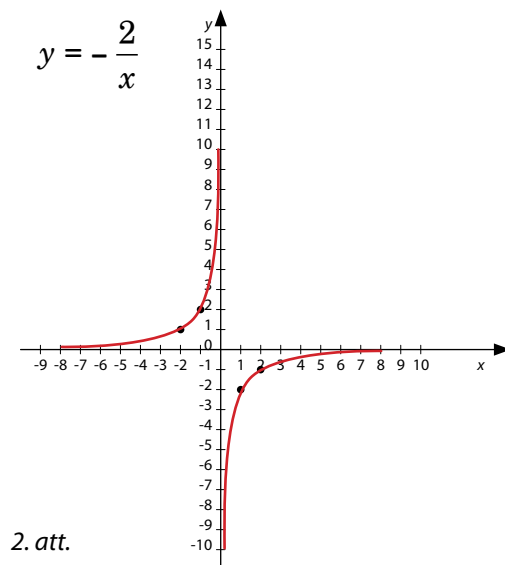
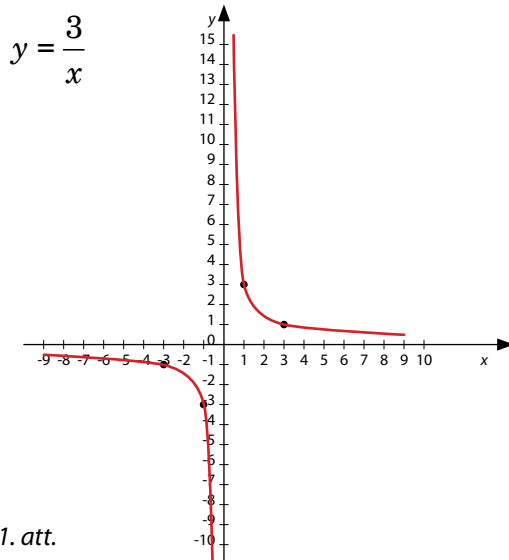
☒ Lai konstruētu funkcijas $y = \frac{3}{x}$ un $y = -\frac{2}{x}$ grafikus, rīkojas šādi:

- ➔ sastāda vērtību tabulu katrai funkcijai

x	-3	-1	1	3
$y = \frac{3}{x}$	-1	-3	3	1

x	-2	-1	1	2
$y = -\frac{2}{x}$	1	2	-2	-1

- ➔ koordinātu plaknē atzīmē punktus, kuru koordinātas ir skaitļu pāri no vērtību tabulas, un caur šiem punktiem novelk liektas līnijas



3. Konstruē funkciju grafikus!

a) $y = \frac{1}{x}$

b) $y = -\frac{1}{x}$

c) $y = -\frac{6}{x}$

d) $y = \frac{4}{x}$

Pēc funkcijas grafika nosaki:

- 1) funkcijas vērtību, ja $x = 1$; -1 ; 2 ; -2 ;
- 2) argumenta vērtību, ja $y = 1$; -1 ; 2 ; -2 ;
- 3) x vērtības, ja $y < 0$;
- 4) y vērtības, ja $x > 0$!

4. Tabulā dotas dažas apgrieztās proporcionalitātes funkcijas x un y vērtības.

Nosaki koeficientu k ! Uzraksti funkciju un aizpildi tabulu!

x	-2	-1	0,5	1	2	3	4
y	-6					4	

Nelineāro vienādojumu sistēmu risināšana

Funkciju grafikus var izmantot nelineāro vienādojumu un vienādojumu sistēmu risināšanā.

Atrisinājumi ir funkciju grafiku **krustpunkti**. Ja funkciju grafiki nekrustojas, tad atrisinājuma nav.

☒ Atrisini grafiski vienādojumu sistēmu $\begin{cases} y - 5 = 2x \\ y = \frac{7}{x} \end{cases}$!

Atrisinājums.

➔ no pirmā vienādojuma $y - 5 = 2x$ izsaka mainīgo $y \rightarrow y = 2x + 5$

➔ patvaļīgi izvēlas x vērtības un ieraksta tās vērtību tabulā

- vienādojumā $y = 2x + 5$ mainīgā x vietā liek izvēlētos skaitļus, aprēķina atbilstošās y vērtības un ieraksta tās tabulā →

x	-2	-1	0	1
y	1	3	5	7

- koordinātu plaknē atliek funkcijai atbilstošos punktus un novelk taisni

x	-7	-1	1	7
y	-1	-7	7	1

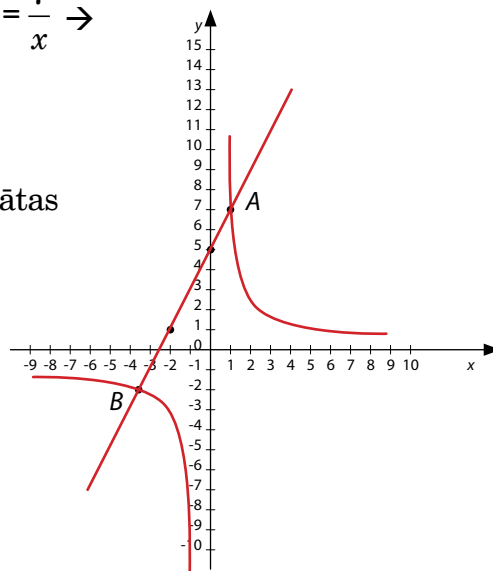
- līdzīgi sastāda vērtību tabulu otrajai funkcijai $y = \frac{7}{x}$ →

- koordinātu plaknē atliek otrajai funkcijai atbilstošos punktus un tos savieno.

- No funkciju grafika nolasa krustpunktu koordinātas A (1;7) un B (-3,5;-2).
Tie ir vienādojumu sistēmas atrisinājumi.

Atbilde. Vienādojumu sistēmas atrisinājumus var pierakstīt divos veidos:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 7 \end{cases} \text{ un } \begin{cases} x_2 = -3,5 \\ y_2 = -2 \end{cases} \text{ jeb } (1; 7) \text{ un } (-3,5; -2).$$



5. Atrisini grafiski vienādojumu sistēmu!

a) $\begin{cases} y = -\frac{3}{x} \\ y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = -x \\ y = -\frac{1}{x} \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \frac{5}{x} \\ y = x + 4 \end{cases}$

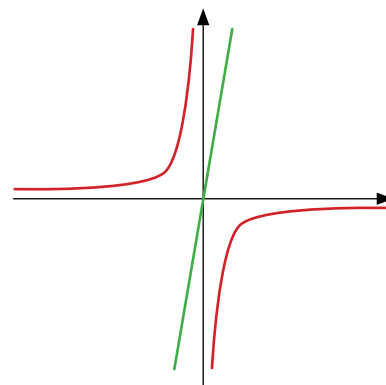
☒ Noteikt, cik atrisinājumu ir vienādojumam $\begin{cases} -\frac{5}{x} = 3x \end{cases}$!

Atrisinājums.

- vienādojuma kreiso un labo pusi uzraksta kā funkcijas un apvieno sistēmā → $\begin{cases} y = -\frac{5}{x} \\ y = 3x \end{cases}$
- uzskicē abu funkciju grafikus →

Funkciju grafiki – taisne un hiperbola – nekrustojas, tātad uzrakstītajai vienādojumu sistēmai nav atrisinājumu.

Atbilde. $\emptyset$



6. Konstruē grafikus un nosaki, cik atrisinājumu ir vienādojumam!

a) $\frac{1}{3x} = -3$ b) $2x^2 = \frac{1}{2x}$ c) $-0,5x = \frac{0,5}{x}$ d) $\frac{10}{x} = -\frac{20}{x}$

Lai noskaidrotu, vai punkts pieder funkcijas grafikam,

→ dotajā formulā x un y vietā ievieto punkta koordinātas

→ veic aprēķinus

→ pārbauda, vai vienādības abu pušu rezultāti ir vienādi, t. i., vai vienādība ir patiesa

→ izdara secinājumus:

→ ja vienādība ir patiesa, tad punkts pieder funkcijas grafikam,

→ ja vienādība ir nepatiesa, tad punkts nepieder funkcijas grafikam.

☒ Vai funkcijas $y = \frac{15}{x}$ grafikam pieder punkti $A(-3, 5)$, $B(15; 1)$ un $C(150; 0,1)$?

Atrisinājums. $5 = \frac{15}{-3}$ iegūst $5 \neq -5$, tātad punkts A nepieder funkcijas $y = \frac{15}{x}$ grafikam.

$1 = \frac{15}{15}$ iegūst $1 = 1$, tātad punkts B pieder funkcijas $y = \frac{15}{x}$ grafikam.

$0,1 = \frac{15}{150}$ iegūst $0,1 = \frac{1}{10}$, tātad punkts C pieder funkcijas $y = \frac{15}{x}$ grafikam.

Atbilde. Punkti B un C pieder, bet punkts A nepieder funkcijas $y = \frac{15}{x}$ grafikam.

7. Vai funkcijas $y = \frac{50}{x}$ grafikam pieder punkti $A(-5; -10)$, $B(5; 100)$ un $C\left(150; \frac{1}{3}\right)$?

8. Nosaki, ar kādu k vērtību punkts $A(-2; 10)$ pieder funkcijas $y = \frac{k}{x}$ grafikam!

9. Zināms, ka hiperbola $y = \frac{k}{x}$ un taisne $y = kx + b$ iet caur punktu $M(2; 1)$. Nosaki k un b vērtības! Uzraksti abas funkcijas un uzzīmē to grafikus!

10. Lai izvestu sniegu no Raiņa bulvāra, 2 kravas mašīnām jāveic pa 12 braucieniem katrai.

a) Cik braucienu veiktu katra mašīna, ja sniegu izvestu ar 3 mašīnām?

b) Cik mašīnu vajadzētu, lai izvestu visu sniegu, ja katra mašīna varētu veikt tikai 6 braucienus?

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

(1 p.) 1. Funkcijas $y = \frac{13}{x}$ nosaukums ir _____.

(1 p.) 2. Formulā $y = \frac{-3}{x}$ atkarīgais mainīgais ir _____.

(1 p.) 3. Funkcijas $y = \frac{7}{x}$ grafiks ir _____.

(2 p.) 4. Ja funkcijas $y = \frac{0,5}{x}$ vērtība ir 1, tad arguments ir _____.

(2 p.) 5. Punkts A (5; -8) pieder funkcijas $y = \frac{k}{x}$ grafikam, ja $k =$ _____.

(2 p.) 6. Funkciju $y = \frac{4}{x}$ un $y = 4x$ grafiku krustpunktu koordinātas ir (___; ___) un (___; ___).

(2 p.) 7. Taisnstūra laukums ir 20 cm^2 . Taisnstūra garums ir a , bet platums ir b . Formula, kura izsaka taisnstūra garuma atkarību no platuma, ir _____.

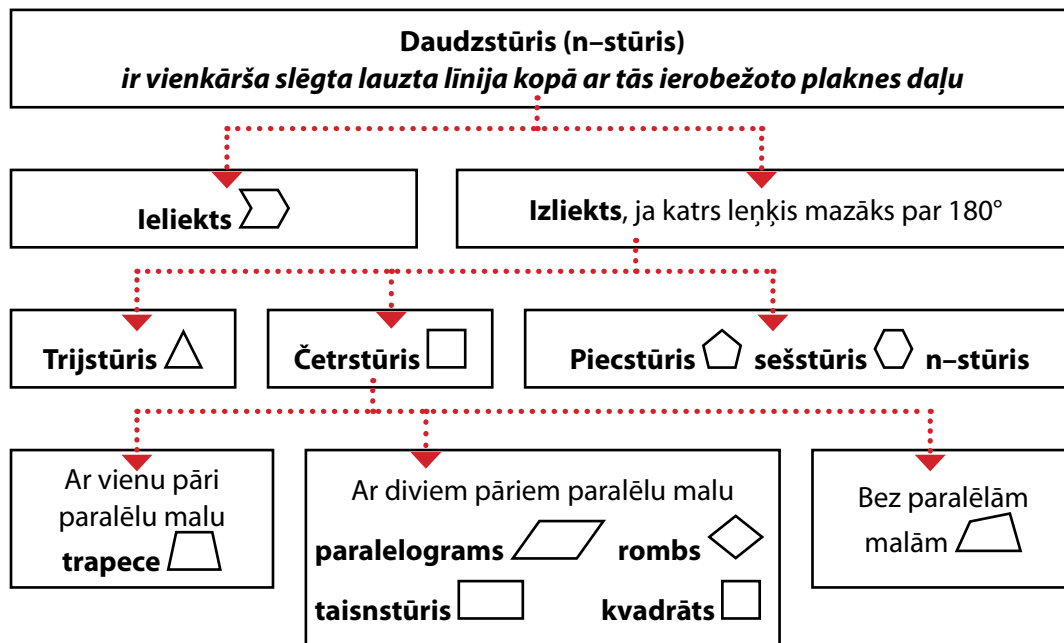
(3 p.) 8. Nosaki vienādojuma $\frac{6}{x} = 2x - 1$ atrisinājumu skaitu, uzskicē funkciju grafikus!

(3 p.) 9. Atrisini vienādojumu sistēmu
$$\begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ y = -2x + 1 \end{cases} !$$

(3 p.) 10. Tālbraucējs aprēķināja: ja vidējo braukšanas ātrumu palielinātu no 80 km/h līdz 90 km/h, tad galapunktā nonāktu par 1h 30 min ātrāk. Cik km garš ir viss maršruts?

16. Daudzstūris. Četrstūri, to īpašības

Ikdienā sastopamies ar priekšmetiem, kuriem ir **daudzstūra** forma, visbiežāk – ar četrstūriem. To modeļi varētu būt ģeometriskie orna-
menti, kas rotā gan apģērbu, gan telpas, gan celtnes, vai sadzīves priekš-
meti, piemēram, galds, māja, reklāmas plakāts, mobilais telefons u. c.



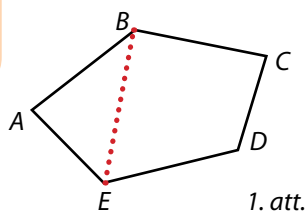
Nogrieznis, kas savieno divas daudzstūra **virsotnes**, kuras **neatro-**
das blakus, ir tā **diagonāle**. **Izliektā** daudzstūrī jebkura **diagonāle**
atrodas tā **iekšpusē**.



Trijstūra leņķu
summa ir 180°

✓ Piecostūris ABCDE ir **izliekts** un tā viena diagonāle ir
BE (*skat. 1. att.*).

✓ **Ieliekta divpadsmitstūra** diagonāle d ir ārpus daudz-
stūra (*skat. 2. att.*).



1. att.



2. att.

Turpmāk pētīsim tikai **izliektu daudzstūru īpašības**.



Izliekta **n–stūra leņķu summa** ir $180^\circ \cdot (n - 2)$, kur n ir daudzstūra
malu skaits.

☑ Aprēķināt desmitstūra leņķu summu!

10-stūra leņķu summa ir $180^\circ \cdot (10 - 2) = 180^\circ \cdot 8 = 1440^\circ$.

☑ Daudzstūra leņķu summa ir 1980° . Cik malu ir šim daudzstūrim?

$$180^\circ \cdot (n - 2) = 1980^\circ$$

$$n - 2 = 1980^\circ : 180^\circ$$

$$n - 2 = 11$$

$$n = 13$$

Atbilde. Dotajam daudzstūrim ir 13 malas.

1. Aizpildi tabulu pēc dotā parauga!

Nosaukums	Malu skaits n	Leņķu summa $= 180^\circ \cdot (n - 2)$
☑ četrstūris	4	$180^\circ \cdot (4 - 2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$
a)	5	
b)		$720^\circ = 180^\circ \cdot (n - 2)$
c) septiņstūris		
d)	8	
e)		1260°

2. Uzzīmē četrstūri, piecstūri, sešstūri, jebkuru citu daudzstūri!

Sadali daudzstūrus trijstūros! Aprēķini daudzstūra leņķu summu, saskaitot trijstūru leņķu summas! Salīdzini iegūto rezultātu ar daudzstūra leņķu summas aprēķinu pēc formulas!

Četrstūris, kuram ir **divi pāri paralēlu malu**, ir **paralelograms**.

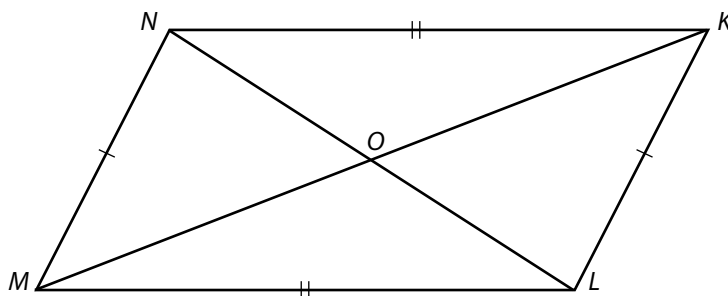


MNKL – paralelograms

$MN \parallel LK$,

$NK \parallel ML$.

3. att.



Paralelograma perimetrs ir visu malu garumu summa (skat. 3.att.)

$$P = MN + NK + KL + LM = 2MN + 2NK = 2ML + 2LK$$



Paralelograma īpašības:

1) Paralelograma pretējās malas ir vienāda garuma
 $\rightarrow MN = LK, NK = ML$.

2) Paralelograma pretējie leņķi ir vienāda lieluma
 $\rightarrow \angle M = \angle K, \angle N = \angle L$.

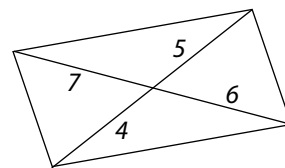
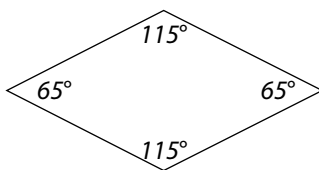
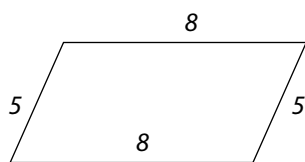
- 3) Paralelograma katras malas pieleņķu summa ir 180°
 $\rightarrow \angle M + \angle N = 180^\circ, \angle N + \angle K = 180^\circ, \angle M + \angle L = 180^\circ,$
 $\angle N + \angle K = 180^\circ.$
 - 4) Paralelograma diagonāle sadala to divos vienādos trijstūros
 $\rightarrow \triangle MNK = \triangle KLM$ utt.
 - 5) Paralelograma diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm
 $\rightarrow MO = OK, NO = OL.$
3. Aprēķini paralelograma leņķus, ja
 - a) viens no tiem ir 56° ;
 - b) divu leņķu summa ir 210° ;
 - c) viens no leņķiem ir 4 reizes lielāks nekā otrs;
 - d) paralelograma leņķu attiecība ir $2 : 3$!
 4. Uzzīmē paralelogramu! Aprēķini paralelograma perimetru, ja vienas malas garums ir 8 cm, bet otras malas garums ir 5cm!
 5. Paralelograma perimetrs ir 30cm. Paralelograma garākā mala ir vienāda ar īsāko diagonāli, kura sadala paralelogramu divos trijstūros. Katra trijstūra perimetrs ir 25cm. Aprēķini paralelograma malas!

Lai noteiktu, **vai četrstūris ir paralelograms**, var izmantot **definīciju** (pārbaudīt malu paralelītāti), bet var arī izmantot **paralelograma pazīmes**. Pirmās trīs pazīmes ir iepriekš aplūkoto īpašību apgrieztie apgalvojumi, bet ceturtā – definīcijas un īpašības apvienojums divām malām. Pazīmes var izmantot arī paralelograma konstruēšanai vai praktiskai izgatavošanai.

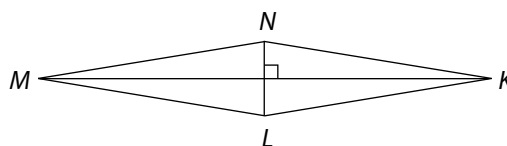
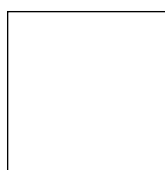
Paralelograma pazīmes:

- 1) Četrstūris ir **paralelograms**, ja tā pretējās malas ir pa pāriem vienāda garuma.
 - 2) Četrstūris ir **paralelograms**, ja tā pretējie leņķi ir pa pāriem vienāda lieluma.
 - 3) Četrstūris ir **paralelograms**, ja tā diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm.
 - 4) Četrstūris ir **paralelograms**, ja tā divas malas ir paralēlas un vienāda garuma.
6. a) Novelc divas krustiskas taisnes! Uz katras taisnes no krustpunkta uz abām pusēm atliec attiecīgi vienādus nogriežņus! Savieno nogriežņu galapunktus! Kādu četrstūri ieguvi?
 - b) Sameklē divus pārus attiecīgi vienāda garuma nogriežņus! (*Piemēram, zīmuļus, lineālus, pildspalvas u. c.*) Izveido paralelogramu! Kura pazīme to pamato?

7. Kuri četrstūri ir paralelogrami, ja a) dotas četrstūra malas, b) leņķi, c) diagonāļu daļas?



Paralelograms, kura **visas malas** ir **vienāda garuma**, ir **rombs**.



4. att.

4. attēlā visi redzamie četrstūri ir rombi.

Rombam piemīt visas paralelograma **īpašības**, bet ir vēl divas īpašības, kuras piemīt tikai **rombam**:

- 1) romba diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras (*skat. 4. att.*)

$$\rightarrow MK \perp LN$$

- 2) romba diagonāles ir romba leņķu bisektrises

$$\rightarrow \angle NMK = \angle LMK \text{ utt.}$$

8. Uzzīmē rombu ABCD! Uzraksti visas romba īpašības!

Kā paraugu vari izmantot paralelograma īpašības.

9. Romba ABCD leņķis C ir 50° . Aprēķini romba pārējos leņķus un trijstūra AOD leņķus, ja O ir diagonāļu krustpunkts!

Līdzīgi paralelogramam, arī **rombam** ir **pazīmes**, pēc kurām nosaka, ka četrstūris ir rombs.

10. Papildini teikumus, kuros izteiktas **romba pazīmes**!

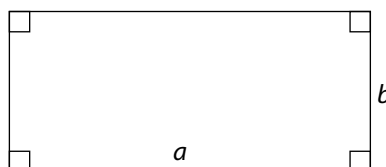
Kā paraugu vari izmantot paralelograma pazīmes.

- a) Ja paralelograma diagonāles ir _____, tad tas ir rombs.
- b) Ja paralelograma divas blakusmalas ir _____, tad tas ir rombs.
- c) Ja paralelograma diagonāles dala uz pusēm _____, tad tas ir rombs.
- d) Ja četrstūra visas malas ir _____, tad tas ir rombs.



Paralelograms, kuram **visi leņķi ir taisni**, ir **taisnstūris**. Taisnstūra perimetrs $P = 2(a + b)$

Taisnstūrim piemīt visas **paralelogramma īpašības**.



11. Daudzpunktu vietā ieraksti vienu no dotajiem vārdiem: „pretējie”, „pielenķu”, „malas”, „trijstūros”, „diagonāles” un iegūsi taisnstūra īpašības!

- 1) Taisnstūra pretējās _____ ir vienāda garuma.
- 2) Taisnstūra _____ leņķi ir vienāda lieluma.
- 3) Taisnstūra katras malas _____ lielumu summa ir 180° .
- 4) Taisnstūra _____ krustpunktā dalās uz pusēm.
- 5) Taisnstūra diagonāle sadala to divos vienādos _____.

Taisnstūra diagonāļu **īpašību** apskatīsim ar pierādījumu.

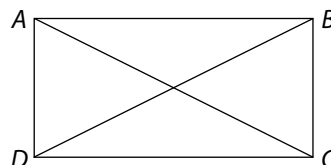


Taisnstūra diagonāles ir vienāda garuma.

Dots: ABCD – taisnstūris

Jāpierāda: $AC = BD$

Pierādījums.



- ➔ Par trijstūriem DAB un CBA secināsim, ka
- 1) ➔ leņķis A un leņķis B ir taisni leņķi (90°),
 - 2) ➔ AB ir kopīga mala (katete),
 - 3) ➔ $AD = BC$, kā taisnstūra pretējās malas.
- ➔ Tātad trijstūri DAB un CBA ir vienādi ($\triangle DAB = \triangle CBA$) pēc pazīmes „mala, leņķis, mala” vai „katete, katete”.
- ➔ Tāpēc $BD = AC$ kā vienādu trijstūru atbilstošās malas (hipotenūzas).

Teorēma ir pierādīta.

Lai noteiktu, vai četrstūris ir taisnstūris, izmanto **taisnstūra pazīmes**:

- 1) Ja četrstūra trīs leņķi ir taisni, tad tas ir taisnstūris.
- 2) Ja viens no paralelograma leņķiem ir taisns, tad tas ir taisnstūris.
- 3) Ja paralelograma diagonāles ir vienāda garuma, tad tas ir taisnstūris.

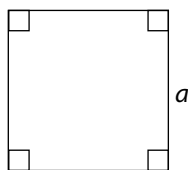
12. Uzzīmē taisnstūri MNZS, novelc tā diagonāles un krustpunktu apzīmē ar A!

Pabeidz teikumus!

- a) Leņķa MNZ lielums ir ____°.
- b) Ja $MN = 5$ cm, tad $ZS =$ ____ cm.
- c) Ja $NS = 15$ cm, tad $MZ =$ ____ cm.
- d) Ja $AZ = 6$ cm, tad $SN =$ ____ cm.
- e) Ja $NZ = 13$ cm un $ZS = 12$ cm, tad taisnstūra perimetrs ir ____ cm.

Ar **kvadrāta** modeļiem ikdienā sastopamies ļoti bieži, piemēram, cepumi, spilveni, gleznu rāmji, šaha dēlītis. Kvadrātu var definēt, izmantojot citu četrstūru jēdzienus.

- 1) Paralelograms, kura visas malas un visi leņķi ir vienādi, ir **kvadrāts**.
- 2) Taisnstūris, kura visas malas ir vienādas, ir **kvadrāts**.
- 3) Rombs, kura visi leņķi ir taisni, ir **kvadrāts**.



Kvadrāta perimetrs
 $P = 4a$

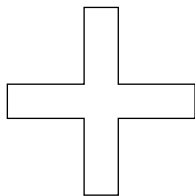
Kvadrātam piemīt visas paralelograma, romba un taisnstūra **īpašības** un kā secinājumu no tām var formulēt vēl vienu **īpašību**:

Kvadrāta diagonāles sadala to četros vienādos vienādsānu taisnleņķa trijstūros.



- 13. Aprēķini kvadrāta malu un laukumu, ja tā perimetrs ir 12 cm!
Uzzīmē šo kvadrātu un iekrāso trešo daļu no tā!
- 14. Uz papīra lapas atlikti tikai divi kvadrāta punkti – diagonāļu krustpunkts un malas viduspunkts! Uzzīmē kvadrātu!
- 15. Uzzīmē kvadrātu, taisnstūri un rombu tā, lai to perimetri būtu vienādi ar 20 cm!
- 16. Uz rūtiņu papīra lapas uzzīmē taisnstūri, kura garums 10 cm un platums 2 cm. Sagriez taisnstūri tā, kā parādīts zīmējumā, un no iegūtajiem 5 gabaliem saliec kvadrātu!





17. Uz rūtiņu papīra lapas uzzīmē krustu!

Sagreiz krustu četrās vienādās daļās un saliec no tām kvadrātu! Kvadrāta malai jābūt tādai pašai kā krusta augstumam un platumam.

18. Uzzīmē taisnstūri 4×9 rūtiņas un pēc tam sagriez to divās daļās tā, lai no tām var salikt kvadrātu!

19. *Praktiskais uzdevums.*

Dots paralelograms. Novelkot taisni paralēli īsākajai malai, atdali rombu! Atlikušo paralelogramu sadali līdzīgi! Šo darbību atkārti vēlreiz! Rezultātā ir iegūti trīs rombi un paralelograms, kura malu garumi ir 1 un 2. Nosaki sākotnējā paralelograma malu garumus! Mēģini iegūt visus iespējamus 8 atrisinājumus!

Pašpārbaude

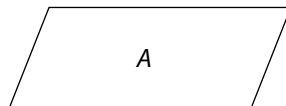
Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

(1 p.) **1.** Taisnstūra pretējās malas ir _____ garuma.

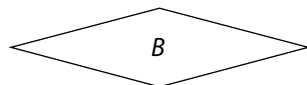
(1 p.) **2.** Paralelograma vienas malas pielenķu summa ir _____°.

(1 p.) **3.** Romba diagonāles ir _____.

(2 p.) **4.** Nosauc zīmējumos redzamās figūras!

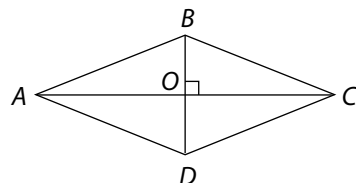


(2 p.) **5.** Uzzīmē taisnstūri KTRV, novelc tā diagonāles. To krustpunktu apzīmē ar O! Turpini vienādību $TO = \underline{\hspace{2cm}}$!



(2 p.) **6.** Aprēķini izliekta divpadsmitstūra iekšējo leņķu summu!

(2 p.) **7.** Aprēķini romba ABCD leņķus, ja O ir diagonāļu krustpunkts un $\angle DAO = 32^\circ$!



(3 p.) **8.** Caur punktu P taisnstūra NMKT iekšpusē novilkta divas taisnes perpendikulāri taisnstūra malām. Pierādi, ka iegūtie četrstūri ir taisnstūri!

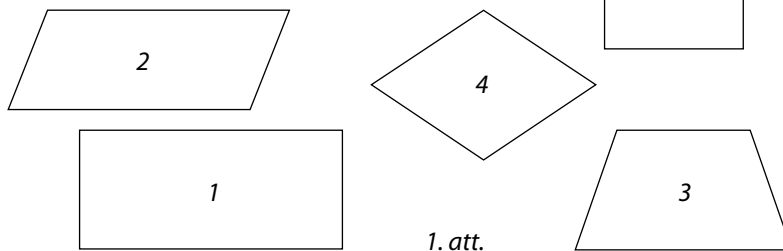
(3 p.) **9.** ABCD ir paralelograms. Paralēli malai BC novilkta taisne, kas malu AB krusto punktā E, bet malu CD krusto punktā F. Pierādi, ka četrstūris AEFD ir paralelograms!

(3 p.) **10.** Skolēnam bija kvadrātveida papīra loksne, kuras malas garums ir 20 cm. Viņš sāka griezt šo kvadrātu 2 cm platās joslās: vispirms nogrieza no vienas malas, pēc tam no otras malas, tad – no trešās, no ceturtās un atkal no pirmās malas utt. Cik cm gara bija 5. josla? Cik cm – 10. josla? Cik joslas ieguva, sagriežot visu kvadrātu?

17. Trapece

1. Ceļotājs dodas uz „Četrstūru” valsti. Lai iekļūtu valstī, viņam pareizi jāsavieto četrstūru attēli (skat. 1. att.) un to nosaukumi. Palīdzi ceļotājam!

- A. PARALELOGRAMS
- B. ROMBS
- C. KVADRĀTS
- D. TAISNSTŪRIS
- E. TRAPECE



Četrstūris, kuram **ir paralēlas tikai divas** malas, ir **trapece**.

Paralēlās malas ir **pamati**, bet **neparalēlās** ir **sānu malas**.

Nogriežņi, kas savieno trapeces pretējās virsotnes, ir **diagonāles**.

Trapeces visu **leņķu summa** ir 360° , bet sānu malu **pielenķu summa** ir 180° .

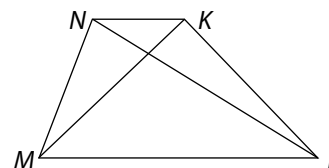


Trapeces MNKL sānu malas ir MN un KL.

Pamati ir ML un NK, $NK \parallel ML$

Diagonāles ir MK un NL.

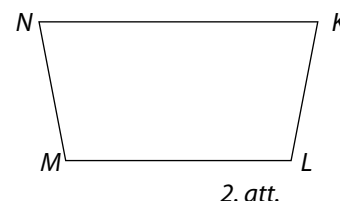
Trapeces perimetrs $P = MN + NK + KL + ML$.



2. Izmēri trapeces leņķus un aprēķini visu leņķu summu (skat. 2. att.)!

Aprēķini sānu malas MN pielenķu summu!

Aprēķini sānu malas KL pielenķu summu!



3. Izmēri trapeces malu garumus un aprēķini perimetru (skat. 2. att.)!

4. Uzzīmē trapeci, kuras garākais pamats ir 4 cm un šī pamata pielenķi ir 45° un 70° !

Apzīmē trapeces virsotnes ar burtiem, aprēķini pārējos leņķus un pieraksti to!

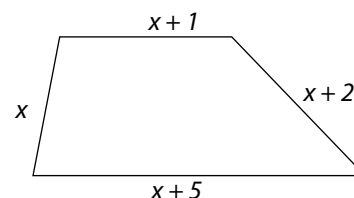
- ☒ Trapeces perimetrs ir 24 cm. Tās viena sānu mala ir par 1cm garāka nekā otra, īsākais pamats ir par 1cm garāks, bet garākais pamats vēl par 3cm garāks nekā garākā sānu mala. Aprēķini trapeces malu garumus!

Atrisinājums.

→ apzīmē īsāko trapeces malu ar x .

→ pārējās malas izsaka, izmantojot x (skat. 3. att.)

→ sastāda vienādojumu $\rightarrow x + x + 1 + x + 2 + x + 5 = 24$



3. att.

→ atrisina vienādojumu → $4x + 8 = 24$

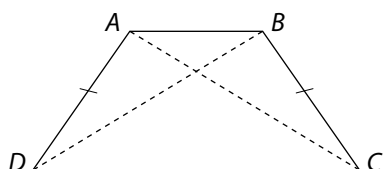
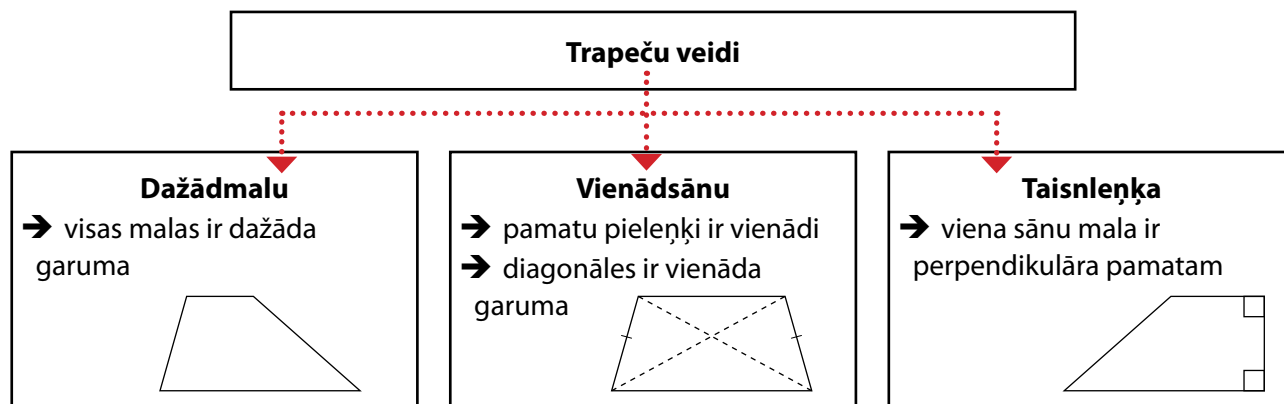
$$4x = 16$$

→ isākās malas garums → $x = 4$

→ pārējo malu garumi → $x + 1 = 5$, → $x + 2 = 6$, → $x + 5 = 9$.

Atbilde. Trapeces malu garumi ir 4 cm, 5 cm, 6 cm un 9 cm.

5. Trapeces ABCD malu garumu attiecība ir $AB:BC:CD:AD = 1:1:1:2$. Aprēķini trapeces malu garumus, ja tās perimetrs ir 30 cm!



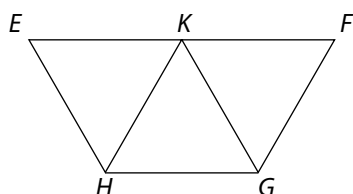
☒ Uzzīmē vienādsānu trapeci un tās vienādās malas un leņķus pieraksta šādi:

→ ABCD – vienādsānu trapecē

→ $AD = BC$ un $AC = BD$

→ $\angle D = \angle C$, $\angle A = \angle B$

6. Uzzīmē vienādsānu trapeci MNKL, ja $MN = NK = 5$ cm! Cik cm gara ir mala KL?



7. Dots: EFGH – vienādsānu trapecē, $EH = HG = 2$ cm, K ir EF viduspunkts, $\angle HKG = 60^\circ$

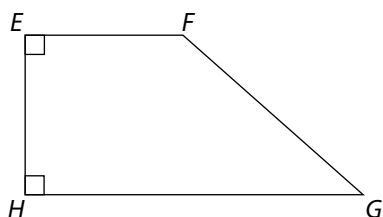
Jāaprēķina: P (EFGH)

☒ Uzzīmē taisnleņķa trapeci un tās perpendikulārās malas un taisnos leņķus pieraksta šādi:

→ EFGH – taisnleņķa trapecē

→ $EH \perp EF$ un $EH \perp HG$

→ $\angle E = \angle H = 90^\circ$



8. Vai dotie apgalvojumi ir patiesi?

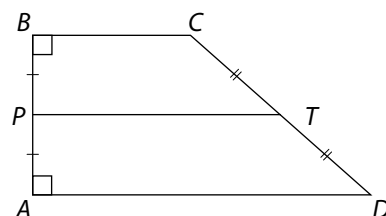
- a) Taisnleņķa trapeces diagonāles ir vienāda garuma.
- b) Taisnleņķa trapeces sānu malu pielenķu summa ir 180° .
- c) Taisnleņķa trapeces visi leņķi ir taisni.
- d) Taisnleņķa trapeces sānu malas nevar būt vienāda garuma.

Trapeces viduslīnija

Trapeces ABCD viduslīnija ir nogrieznis **PT**

- tā savieno sānu malu viduspunktus
- tā ir paralēla pamatiem → $PT \parallel BC$, $PT \parallel AD$
- tās garums ir puse no pamtu summas

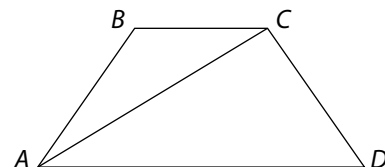
$$\rightarrow PT = \frac{BC + AD}{2}$$



9. Vienādsānu trapeces diagonāle ar īsāko pamatu veido 20° leņķi, bet ar sānu malu 100° leņķi. Trapeces pamati ir 4 cm un 10 cm. Aprēķini trapeces leņķus un viduslīniju!

10. Dots: ABCD – trapecē, $\angle BAC = 40^\circ$,
 $\angle DAC = 35^\circ$, $\angle ACD = 85^\circ$.

Jāaprēķina: Trapeces ABCD leņķi.



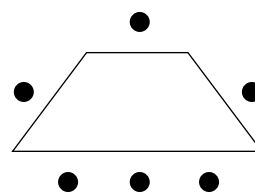
11. Vienādsānu trapeces platā leņķa bisektrise atdala no tās rombu un dala garāko pamatu uz pusēm. Aprēķini trapeces leņķus un malas, ja trapeces perimetrs ir 30 cm!

12. Praktiskais uzdevums.

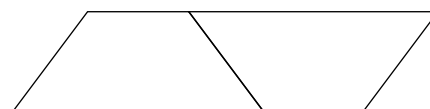
Birojā izvietoti 4 trapečveida galdi. Pie tiem strādā 24 darbinieki. Parasti viņi sēž tā, kā parādīts 4. attēlā.

a) Ja sanāksmē piedalās 10 cilvēki, tad pietiek ar diviem galdiem, kurus novieto tā, kā rādīts 5. attēlā. Uzzīmē, kā var apsēsties 10 cilvēki!

b) Uzzīmē galdu un cilvēku izvietojumu, ja sanāksmē jāpiedalās 14 cilvēkiem!



4. att.

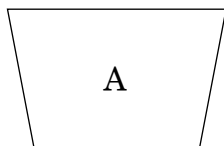


5. att.

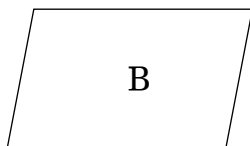
Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

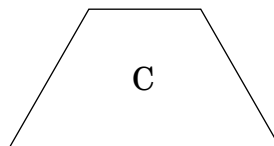
(1 p.) 1. Kurā zīmējumā **nav** attēlota trapece?



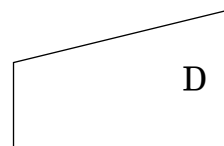
A



B



C



D

(1 p.) 2. Trapeces visu leņķu summa ir _____.

(1 p.) 3. Trapeces malu garumi ir 5 cm, 2 cm, 5 cm un 10 cm.
Tā ir _____ trapece (veids).

(2 p.) 4. Trapeces viena pamata pieleņķi ir 54° un 81° . Aprēķini trapeces pārējos leņķus!

(2 p.) 5. Trapeces malas ir 3 cm, 6 cm, 8 cm un 5 cm. Aprēķini trapeces perimetru!

(2 p.) 6. Aprēķini taisnleņķa trapeces leņķus, ja viens no tiem ir 40° !

(2 p.) 7. Trapeces pamatu garumi ir 12 cm un 18 cm. Aprēķini trapeces viduslīnijas garumu! Cik garos nogriežņos diagonāle sadala viduslīniju?

(3 p.) 8. Taisnleņķa trapeces viens leņķis ir 45° , īsākais pamats ir 4 cm, viduslīnija ir 10 cm. Aprēķini trapeces īsāko sānu malu!

(3 p.) 9. Trapeces malu attiecība ir 2:2:2:5, bet viduslīnija ir 21 cm. Aprēķini trapeces perimetru!

(3 p.) 10. Vienādsānu trapeces platā leņķa bisektrise ir paralēla sānu malai. Bisektrise atdala no trapeces vienādmalu trijstūri. Aprēķini trapeces leņķus un malas, ja trapeces perimetrs ir 20 cm!

18. Kvadrātvienādojums. Vjeta teorēma

Kvadrātvienādojums

Kvadrātvienādojums ir vienādojums, ko pieraksta šādi:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ kur } a \neq 0.$$



Izpēti tabulā dotos kvadrātvienādojumu koeficientus!

Kvadrātvienādojums	Kvadrātlocekļa koeficients a	Lineārā locekļa koeficients b	Brīvais loceklis c
$3x^2 + 2x - 5 = 0$	3	2	-5
$x^2 - 2x - 3 = 0$	1	-2	-3
$-x^2 + 2x + 3 = 0$	-1	2	3
$5x^2 = 0$	5	0	0
$x^2 - 5x = 0$	1	-5	0
$3x^2 - 48 = 0$	3	0	-48

ax^2 – kvadrātloceklis
a – kvadrātlocekļa koeficients
 bx – lineārais loceklis
b – lineārā locekļa koeficients
c – brīvais loceklis

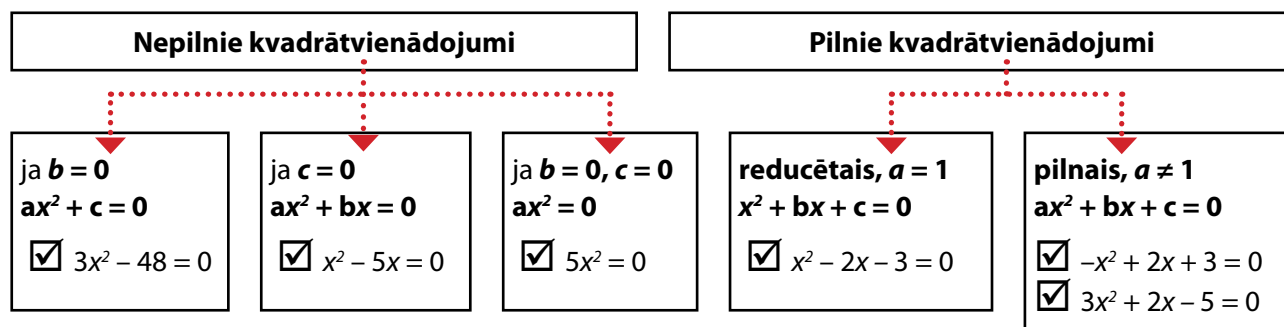
☒ Lai noskaidrotu, vai vienādojums $(2x + 3) \cdot x + 4 = 9$ ir kvadrātvienādojums, jāatver iekavas un jāveic nepieciešamie pārveidojumi. To dara šādi:

- uzraksta vienādojumu $\rightarrow (2x + 3) \cdot x + 4 = 9$
- atver iekavas $\rightarrow 2x^2 + 3x + 4 = 9$
- pārnes kreisajā pusē visus vienādojuma saskaitāmos
 $\rightarrow 2x^2 + 3x + 4 - 9 = 0$
- savelk līdzīgos saskaitāmos $\rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$
- iegūtais vienādojums $2x^2 + 3x - 5 = 0$ ir kvadrātvienādojums, kur **a** = 2, **b** = 3, **c** = -5.

1. Nosaki, kuri no vienādojumiem ir kvadrātvienādojumi!

- a) $2k + 3 = 0$ c) $\frac{2}{x} = 4$ e) $x^2 + 3x + 1 = 0$ g) $x^2 - x = 0$ i) $(2x + 1)^2 = 5$
- b) $3x^2 - 15 = 0$ d) $x(x - 1) = 2$ f) $-3x = 0$ h) $\frac{x - 1}{2} = 4$ j) $x^2 - 3 = 7x + x^2$

Atkarībā no koeficientu a , b un c vērtībām ir vairāki kvadrātvienādojumu veidi.



Jebkuru pilno kvadrātvienādojumu var pārveidot par **reducēto kvadrātvienādojumu**.

☒ Lai pilno kvadrātvienādojumu pārveidotu par reducēto kvadrātvienādojumu, rīkojas šādi:

- ➔ uzraksta pilno kvadrātvienādojumu $\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$
- ➔ dala visus vienādojuma koeficientus ar koeficienta a vērtību,
 $\rightarrow$ tā kā $a = 3$, tad $3x^2 + 2x - 5 \div 3$
- ➔ uzraksta reducēto kvadrātvienādojumu $\rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$

2. Aizpildi tabulu!

Kvadrātvienādojums	Kvadrātlocekļa koeficients a	Lineārā locekļa koeficients b	Brīvais loceklis c	Pilnais vai nepilnais
a) $15x^2 - 8x + 1 = 0$	15	-8	1	pilnais
b) $3x^2 - x - 2 = 0$	?	?	?	?
c) ?	-6	7	-2	?
d) $-4x^2 = 0$	?	?	?	?
e) ?	3	-6	0	?
f) ?	-1	0	72	?

Kvadrātvienādojumu risināšana



Lai atrisinātu pilno kvadrātvienādojumu, nosaka diskriminantu D un saknes x_1 un x_2 .

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c, \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{un} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

☒ Vienādojuma $3x^2 + 2x - 5 = 0$ diskriminantu aprēķina šādi:

- ➔ nosaka vienādojuma $3x^2 + 2x - 5 = 0$ koeficientus a, b, c
 $\rightarrow a = 3; b = 2; c = -5$

→ ievieto vienādojuma koeficientu vērtības diskriminanta formulā

$$\rightarrow D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64$$

Izmantojot diskriminanta vērtību, nosaka kvadrātvienādojuma sakņu skaitu

Diskriminanta formula

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Ja $D > 0$, tad kvadrātvienādojumam ir **divas dažādas saknes**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a}$$

Ja $D = 0$, tad kvadrātvienādojumam ir **divas vienādas saknes**,

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{0}}{2 \cdot a} = -\frac{b}{2a}$$

Ja $D < 0$, tad kvadrātvienādojumam **sakņu nav** $\emptyset$

Izpēti piemēros dotos kvadrātvienādojumu risinājumus:

☒ $3x^2 + 2x - 5 = 0$ $D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 64$ Vienādojumam ir divas dažādas saknes $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 + 8}{6} = 1$ $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 - 8}{6} = -1\frac{2}{3}$	☒ $-x^2 + 4x - 4 = 0$ $D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0$ Vienādojumam ir divas vienādas saknes $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$ $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$	☒ $x^2 - 2x + 3 = 0$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8$ Vienādojumam sakņu nav $\emptyset$
---	--	---

3. Aizpildi tabulu!

Kvadrātvienādojums	Diskriminants $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$	Vienādojuma saknes x_1 un x_2
a) $15x^2 - 8x + 1 = 0$	$D = (-8)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 1 = 4$	...
b) $3x^2 - x - 2 = 0$		
c) $-6x^2 + 7x - 2 = 0$		
d) $x \cdot (5 - x) = 14 \cdot (x + 1)$		
e) $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2 = -8$		

Nepilno kvadrātvienādojumu risināšana

Vienādojumu $ax^2 = 0$ risina šādi:

$ax^2 = 0$ $x^2 = 0 : a$ $x^2 = 0$ $x = \sqrt{0}$ $x = 0$	☒ $5x^2 = 0$ $x^2 = 0 : 5$ $x^2 = 0$ $x = \sqrt{0}$ $x = 0$	☒ $\frac{1}{2}x^2 = 0$ $x^2 = 0 : \frac{1}{2}$ $x^2 = 0$ $x = \sqrt{0}$ $x = 0$
---	---	---

Vienādojumu $ax^2 + c = 0$ risina šādi:

$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = 0 - c$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -c : a$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$	☒ $3x^2 - 48 = 0$ $3x^2 = 0 + 48$ $x^2 = 48$ $x^2 = 48 : 3$ $x^2 = 16$ $x_1 = \sqrt{16} = 4$ $x_2 = -\sqrt{16} = -4$	☒ $2x^2 - 6 = -4$ $2x^2 = -4 + 6$ $2x^2 = 2$ $x^2 = 1$ $x_1 = \sqrt{1} = 1$ $x_2 = -\sqrt{1} = -1$
---	--	---

Vienādojumu $ax^2 + bx = 0$ risina šādi:

$ax^2 + bx = 0$ $x \cdot (ax + b) = 0$ Ir divi atrisinājumi: 1) $x_1 = 0$ 2) $ax + b = 0$ $ax = -b$ $x = -b : a = -\frac{b}{a}$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	☒ $x^2 - 5x = 0$ $x \cdot (x - 5) = 0$ 1) $x_1 = 0$ 2) $x - 5 = 0$ $x_2 = 5$	☒ $x^2 + 3x = x$ $x^2 + 3x - x = 0$ $x^2 + 2x = 0$ $x \cdot (x + 2) = 0$ 1) $x_1 = 0$ 2) $x + 2 = 0$ $x_2 = -2$
---	--	---

4. Atrisini nepilnos kvadrātvienādojumus!

a) $3x^2 = 75$ c) $x^2 + 25 = 0$ e) $k^2 - 100 = 0$ g) $y^2 = 6y$

i) $3x^2 + 49 = 1$ b) $\frac{1}{3}y^2 = 0$ d) $10y^2 + 3y = 0$ f) $\frac{1}{4}x^2 = 1$

h) $x(x + 1) = 0$ j) $x(x + 1) = 2x - x^2$

☒ Lai atrisinātu kvadrātvienādojumu $(x + 1)^2 = 4$, rīkojas šādi:

→ izskaitļo kvadrātsakni no 4 → $x + 1 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

→ aplūko divus gadījumus atkarībā no iegūtās saknes vērtības

→ 1) $x + 1 = 2$

$$x = 2 - 1$$

$$x_1 = 1$$

2) $x + 1 = -2$

$$x = -2 - 1$$

$$x_2 = -3$$

Atbilde. $x_1 = 1, x_2 = -3$.

5. Atrisini kvadrātvienādojumus!

a) $(x + 2)^2 = 9$

b) $(x - 3)^2 = 16$

c) $(x - 4)^2 = 0$

Vjeta teorēma

Ja reducētā kvadrātvienādojuma ($a=1$) diskriminants $D \geq 0$, tad tā **sakņu reizinājums** vienāds ar **brīvo locekli c** , bet **sakņu summa** ir vienāda ar **lineārā locekļa koeficientam pretējo skaitli $(-b)$** .



☒ Lai atrisinātu reducēto vienādojumu $x^2 - 2x - 3 = 0$, rīkojas šādi:

→ nosaka vienādojuma diskriminantu

$$\rightarrow D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

→ salīdzina diskriminantu ar 0, lai noskaidrotu kvadrātvienādojuma sakņu skaitu, → $16 > 0$, tad dotajam kvadrātvienādojumam ir divas dažādas saknes

→ uzraksta Vjeta teorēmu →
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

→ uzraksta iespējamās sakņu reizinājumus

$$\rightarrow (-1) \cdot 3 = -3 \text{ vai } 1 \cdot (-3) = -3$$

→ aprēķina sakņu summu un noskaidro derīgo sakņu pāri

$$\rightarrow 1 + (-3) = -2 \text{ (neder)} \text{ un } 3 + (-1) = 2 \text{ (der)}$$

→ pārbauda Vjeta teorēmas nosacījumus →
$$\begin{cases} (-1) \cdot 3 = -3 \\ -1 + 3 = 2 \end{cases}$$

→ tāpat $x_1 = -1, x_2 = 3$

Atbilde. $x_1 = -1$ un $x_2 = 3$

$$x^2 + bx + c = 0$$

Ja $D \geq 0$, tad

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$$

Ja $D < 0$, tad kvadrātvienādojumam nav sakņu un Vjeta teorēma neizpildās.

6. Izmantojot Vjeta teorēmu, aizpildi tabulu!

Vienādojums	sakņu reizinājums $x_1 \cdot x_2$	sakņu summa $x_1 + x_2$	x_1	x_2
$x^2 - x - 6 = 0$	-6	1	-2	3
$x^2 + x - 6 = 0$				
$x^2 + 5x - 6 = 0$				
$x^2 - 6x + 8 = 0$				
$x(x - 1) = 2 - 2x$				
$(x + 3)^2 + 2(x - 9) = 0$				

Vjeta teorēmas izmantošana, lai sastādītu vienādojumu, ja dotas tā saknes.

☒ Lai sastādītu kvadrātvienādojumu, kura saknes ir $x_1 = 2$ un $x_2 = 3$, rīkojas šādi:

- ➔ nosaka sakņu reizinājumu, kas ir koeficients **C**
 $\rightarrow c = x_1 \cdot x_2, c = 2 \cdot 3 = 6$
- ➔ nosaka sakņu summu, tas ir koeficients **(-b)**
 $\rightarrow (-b) = x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$
- ➔ nosaka koeficientu **b** $\rightarrow -b = 5, b = 5 : (-1) = -5$
- ➔ ievieto koeficientus un uzraksta vienādojumu $\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

7. Sastādi kvadrātvienādojumu, izmantojot saknes!

x_1	x_2	sakņu summa $x_1 + x_2$	sakņu reizinājums $x_1 \cdot x_2$	vienādojums
1	2			
-3	4			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$			
-2	-2			

☒ Lai atrisinātu kvadrātvienādojumu $x^2 + bx + 6 = 0$, kura sakne ir 2, aprēķina koeficienta **b** vērtību un otro sakni. To dara šādi:

- ➔ x vietā ievieto zināmo sakni 2 $\rightarrow 2^2 + b \cdot 2 + 6 = 0$
- ➔ veic nepieciešamos pārveidojumus $\rightarrow 4 + b \cdot 2 + 6 = 0$
 $10 + 2b = 0$
 $2b = -10$
 $b = -10 : 2$
 $b = -5$
- ➔ vienādojumā $x^2 + bx + 6 = 0$ ievieto $b = -5 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
- ➔ pēc Vjeta teorēmas nosaka kvadrātvienādojuma otro sakni
 $\rightarrow x_1 \cdot x_2 = 6$
 $2 \cdot x_2 = 6$
 $x_2 = 6 : 2 = 3$ *Atbilde.* $b = -5, x_2 = 3$

8. Kvadrātvienādojuma viena sakne ir 1. Aprēķini nezināmo koeficientu un otro sakni!

a) $x^2 + bx - 2 = 0$

b) $x^2 - bx + 3 = 0$

c) $x^2 + 2x + c = 0$

☒ Dots kvadrātvienādojums $x^2 - 6x + 8 = 0$. Nerisinot to, aprēķini izteiksmes vērtību:

a) $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$

b) $x_1^2 + x_2^2$

→ izmanto Vjeta teorēmu

→ $x_1 + x_2 = 8, x_1 \cdot x_2 = 6$

→ atbilstošās izteiksmes aizvieto ar skaitliskām vērtībām →

$$\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2} = \frac{6}{8} = 1 \frac{1}{3}$$

→ papildina izteiksmi, lai var izmantot

saīsinātās reizināšanas formulu

$(a + b)^2 \rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \end{aligned}$$

→ atbilstošās izteiksmes aizvieto ar skaitliskām vērtībām

→ $x_1 + x_2 = 8, x_1 \cdot x_2 = 6$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \\ &= 8^2 - 2 \cdot 6 = 64 - 12 = 52 \end{aligned}$$

9. Dots kvadrātvienādojums $x^2 - 13x + 5 = 0$, kura saknes ir iracionāli skaitļi. Nerisinot to, aprēķini izteiksmes vērtības!

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $(x_1 + x_2)^2$

d) $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}$

e) $x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2$

10. Atrodi kvadrātvienādojumu saknes! Atbilstošās figūrās vispirms ieraksti mazāko sakni, pēc tam – lielāko. Izmanto iegūtos skaitļus, lai sastādītu nākamo vienādojumu!

a) $x^2 + x - 12 = 0$

b) $x^2 - \square x + \bigcirc = 0$

$x_1 = \square \quad x_2 = \bigcirc$

$x_1 = \square \quad x_2 = \square$

c) $\square x^2 - 2 \cdot \square x + 5 = 0$

$x_1 = \triangle \quad x_2 = \hexagon$

Kvadrātvienādojumu izmanto arī teksta uzdevumu risināšanā.

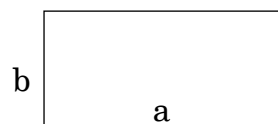
☒ Taisnstūra garums ir par 2 cm lielāks nekā tā platums, bet tā laukums ir 35 cm². Lai aprēķinātu taisnstūra perimetru, rīkojas šādi:

→ taisnstūra platumu apzīmē ar x



$S = a \cdot b$

$P = (a + b) \cdot 2$



- taisnstūra garumu apzīmē ar $x + 2$
- taisnstūra laukums $\rightarrow x(x + 2)$
- sastāda un atrisina kvadrātvienādojumu $\rightarrow x(x + 2) = 35$

$$x^2 + 2x = 35$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x_1 = -7 \text{ (neder, jo platums ir pozitīvs lielums), } x_2 = 5 \text{ (cm)}$$
- iegūto platuma vērtību ievieto garuma aprēķināšanas izteiksmē un aprēķina garumu $\rightarrow x + 2 = 5 + 2 = 7 \text{ (cm)}$
- aprēķina taisnstūra perimetru $\rightarrow P = 2 \cdot (5 + 7) = 2 \cdot 12 = 24 \text{ (cm)}$
- Atbilde.* $P = 24 \text{ (cm)}$.

11. Pabeidz uzdevuma risinājumu!

Divu viens otram sekojošo naturālo skaitļu reizinājums ir 156.
 Nosaki abus šos skaitļus!

$x \dots$ tik ir mazākais skaitlis

$x + 1 \dots$ tik ir lielākais skaitlis

12. Viena kvadrāta mala ir par 5 cm garāka nekā otra kvadrāta mala, bet šo kvadrātu laukumu summa ir 53 cm^2 . Aprēķini abu kvadrātu malu garumus!

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Vai skaitlis $x = -3$ ir vienādojuma $x^2 + 3x = 0$ sakne?
- (1 p.) 2. Nosaki a , b un c koeficientus vienādojumam $5 + x^2 - 6x = 0$!
- (1 p.) 3. Uzraksti nepilno kvadrātvienādojumu, kuram kvadrātlocekļa koeficients ir 3, bet lineārā locekļa koeficients ir -1 .
- (2 p.) 4. Pārveido vienādojumu $2x^2 + 8x - 10 = 0$ par reducēto kvadrātvienādojumu!
- (2 p.) 5. Cik sakņu ir vienādojumam $x^2 - 6x + 5 = 0$?
- (2 p.) 6. Aprēķini vienādojuma $4x^2 = 0$ saknes!
- (2 p.) 7. Aprēķini vienādojuma $2x^2 = 2x$ saknes!
- (3 p.) 8. Aprēķini vienādojuma $4x^2 + 7x - 2 = 0$ saknes!
- (3 p.) 9. Nosaki sakņu reizinājumu un sakņu summu vienādojumam $x^2 - 6x - 16 = 0$!
- (3 p.) 10. Sastādi kvadrātvienādojumu, kura saknes ir $x_1 = 2$ un $x_2 = -2$!

19. Kvadrātfunkcija. Grafiku pārveidojumi

Kvadrātfunkcija ir funkcija, ko uzraksta šādi: $f(x) = ax^2 + bx + c$, kur $a \neq 0$.



Kvadrātfunkciju piemēri:

☒ $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, kur $a = 3, b = 2, c = -5$

☒ $f(x) = 5x^2$, kur $a = 5, b = 0, c = 0$

☒ $f(x) = x^2 - 5x$, kur $a = 1, b = -5, c = 0$

☒ Lai noskaidrotu, vai punkts $A(-1; -2)$ pieder funkcijas $f(x) = 2x^2$ grafikam, rīkojas šādi:

→ funkcijas izteiksmē ievieto mainīgo $x = -1, y = -2$ vērtības
→ $-2 = 2 \cdot (-1)^2$

→ veic nepieciešamos aprēķinus → $-2 = 2 \cdot 1$
 $-2 = 2$

→ pārbauda, vai iegūtā izteiksme ir patiesa vienādība
→ tā kā $-2 \neq 2$, tad punkts $A(-1; -2)$ nepieder funkcijas $f(x) = 2x^2$ grafikam.

1. Noskaidro, kuri punkti pieder funkcijas $f(x) = 2x^2$ grafikam!

a) $A(0; 0)$ b) $B(-1; -2)$ c) $C(1; 2)$ d) $D(2; 4)$?

☒ Lai noskaidrotu, ar kādu c vērtību funkcijas $f(x) = x^2 - 2x + c$ grafiks iet caur punktu $(-1; 4)$, rīkojas šādi:

→ funkcijas izteiksmē ievieto $x = -1, y = 4$
→ $4 = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + c$

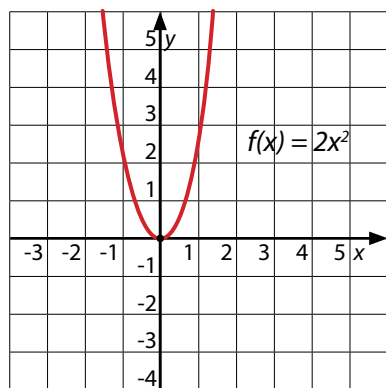
→ risina iegūto vienādojumu → $4 = 1 + 2 + c$
 $-c = 1 + 2 - 4$
 $-c = -1$
 $c = (-1) : (-1) = 1$

→ c vērtību ievieto funkcijas formulā → $f(x) = x^2 - 2x + 1$

☒ Lai sastādītu vērtību tabulu funkcijai $f(x) = 2x^2$ un uzzīmētu tās grafiku, rīkojas šādi:

→ sastāda tabulu, kurā ieraksta dažas x vērtības. y aprēķina, ievietojot atbilstošās x vērtības funkcijas izteiksmē $f(x) = 2x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	2	0	2	8



1. att.

- ➔ nolasa tabulā ierakstītās punktu koordinātas un atliek šos punktus koordinātu plaknē
- ➔ savieno punktus ar liektu līniju
- ➔ iegūst funkcijas $f(x) = 2x^2$ grafiku (skat. 1. att.).

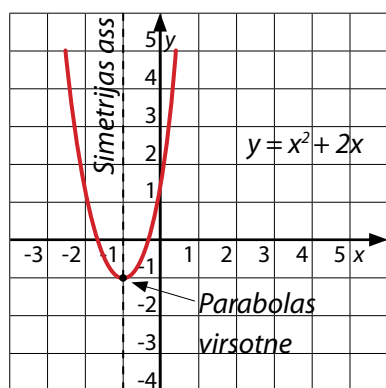


Kvadrātfunkcijas grafiks ir **parabola**. Tā ir simetriska liekta līnija, kuras **simetrijas ass** ir paralēla Oy asij. Lai novilktu parabolas simetrijas asi, nosaka parabolas **virsošnes koordinātas**.



Parabolas virsošnes koordinātu x aprēķina pēc formulas $x = -\frac{b}{2a}$, bet koordinātas y vērtību iegūst, ja funkcijas izteiksmē ievieto x skaitlisko vērtību.

- ☒ Lai aprēķinātu parabolas $f(x) = x^2 + 2x$ virsošnes koordinātas, un konstruētu simetrijas asi, rīkojas šādi:



2. att.

- ➔ no funkcijas izteiksmes nolasa koeficientu a un b skaitliskās vērtības $\rightarrow a = 1; b = 2$
- ➔ lai noteiktu virsošnes koordinātu x , formulā $x = -\frac{b}{2a}$ ievieto koeficientu a un b skaitliskās vērtības
- $\rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1$
- ➔ lai aprēķinātu virsošnes koordinātu y , funkcijas izteiksmē ievieto iepriekš noteikto x skaitlisko vērtību
- $x = -1 \rightarrow y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 = -1.$

Parabolas $f(x) = x^2 + 2x$ virsošnes koordinātas ir $(-1; -1)$

- ➔ caur parabolas virsošni novelk taisni paralēlu Oy asij. Tā ir funkcijas grafika simetrijas ass (skat. 2. att.).

Parabolas virsošne ir grafika viszemākais vai visaugstākais punkts.



Funkcijas saknes ir funkcijas grafika krustpunkti ar x asi. Tās aprēķina, ja funkcijas izteiksmi pielīdzina nullei $f(x)=0$.

No funkcijas $y = x^2 + 2x$ grafika (skat. 2. att.) var nolasīt šīs funkcijas saknes $x_1 = -2$ un $x_2 = 0$.

Kvadrātfunkcijas saknes ir kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ atrisinājumi.



☒ Lai noteiktu kvadrātfunkcijas $f(x) = x^2 + 4x$ saknes, nezīmējot grafiku, rīkojas šādi:



→ funkcijas izteiksmi pielīdzina nullei → $x^2 + 4x = 0$ (nepilns kvadrātvienādojums)

→ risina atbilstošo nepilno kvadrātvienādojumu

$$\rightarrow x(x + 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x_2 = -4$$

Atbilde. $x_1 = 0, x_2 = -4$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Ja funkcijas izteiksmē $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrātlocekļa koeficients a ir $a > 0$, tad parabolas zari vērsti uz augšu, ja $a < 0$, tad parabolas zari vērsti uz leju.



☑ $f(x) = x^2 + 4$ un $a = 1$, tā kā $1 > 0$, tad parabolas zari vērsti uz augšu.

☑ $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$ un $a = -2$, tā kā $-2 < 0$, tad parabolas zari vērsti uz leju.

2. Ievieto teikumos atbilstošo teksta fragmentu: *parabola, uz augšu,*

kvadrātfunkcija, $a = 3$ un $3 > 0$, $x = \frac{-6}{6} = -1$, $3x^2 + 6x = 0$!

Funkciju $f(x) = 3x^2 + 6x$ sauc par _____. Tās grafiks ir _____.

Lai noteiktu kvadrātfunkcijas $f(x) = 3x^2 + 6x$ saknes, jārisina vienādojums _____.

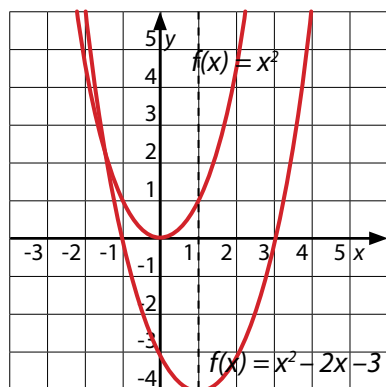
Dotās parabolas virsotnes koordināta x ir $x = \frac{\dots}{\dots} = \dots$.

Dotās funkcijas grafika zari vērsti _____, jo _____.

☒ Lai konstruētu funkcijas $f(x) = x^2 - 2x - 3$ grafiku, rīkojas šādi:

→ nosaka parabolas virsotnes koordinātas → $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$,
 $y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$ tātad parabolas virsotnes koordinātas ir $(1; -4)$

→ atliek parabolas virsotni koordinātu plaknē



→ novelk parabolai simetrijas asi caur parabolai virsotni paralēli Oy asij

→ nosaka kvadrātfunkcijas saknes, risinot atbilstošo kvadrātvienādojumu → $x^2 - 2x - 3 = 0$, t. i., $c = -3$, $b = 2$ vienādojumu risina pēc Vjeta teorēmas:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad x_1 = -1, x_2 = 3$$

→ atzīmē funkcijas saknes koordinātu plaknē

→ nosaka parabolas zaru vērsumu pēc koeficienta a zīmes
→ $a = 1$, $1 > 0$, tātad parabolas zari vērsti uz augšu

→ sastāda vērtību tabulu dažiem punktiem, kuri pieder funkcijas grafikam →

x	-2	0	2
y	5	-3	-3

→ atzīmē punktus koordinātu plaknē, vienlaikus atzīmējot tiem simetriskos punktus pret parabolas simetrijas asi

→ funkcijas grafiku iegūst, savienojot punktus ar liektu līniju

3. Konstruē funkciju grafikus!

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = x^2 - 3x - 10$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

d) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$



Kvadrātfunkcijas izteiksmē $f(x) = ax^2 + bx + c$ mainīgā x vietā var ievietot jebkuru skaitli, tāpēc kvadrātfunkcijas definīcijas apgabals ir R .



Funkcija ir **pozitīva** ($y > 0$), ja tās grafiks atrodas virs Ox ass.
Funkcija ir **negatīva** ($y < 0$), ja tās grafiks atrodas zem Ox ass.

4. Aizpildi tabulu pēc norādītā parauga 2. kolonnā!

Grafika skice				
$f(x) = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 8$			
$f(x) > 0$	$x \cdot (-\infty; 6) \cdot (8; +\infty)$			
$f(x) < 0$	$x \cdot (6; 8)$			

Kvadrātfunkcijas grafiku pārveidojumi

Parabola $y = x^2$ ir **vienības parabola**.

Grafiks $f(x) = x^2 + c$ ir vienības parabola, kas pārvietota $|c|$ vienības **pa Oy asi** virzienā **uz augšu**, ja $c > 0$, vai **uz leju**, ja $c < 0$.

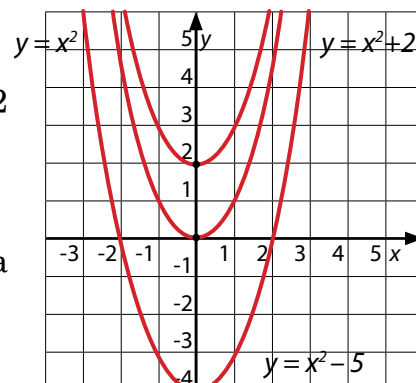


☑ $f(x) = x^2 + 2$

$c = 2, 2 > 0 \rightarrow$ vienības parabola $y = x^2$ pārvietota 2 vienības pa y asi virzienā uz augšu.

☑ $f(x) = x^2 - 5$

$c = -5, -5 < 0 \rightarrow$ vienības parabola $y = x^2$ pārvietota 5 vienības pa y asi virzienā uz leju.



Grafiks $f(x) = (x + m)^2$ ir vienības parabola, kas pārvietota $|m|$ vienības **pa Ox asi** virzienā **pa kreisi**, ja $m > 0$, vai **pa labi**, ja $m < 0$.

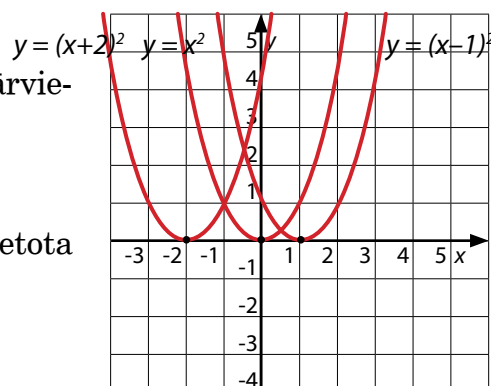


☑ $f(x) = (x - 1)^2$

$m = -1, -1 < 0 \rightarrow$ vienības parabola $y = x^2$ pārvietota 1 vienību pa Ox asi virzienā pa labi.

☑ $f(x) = (x + 2)^2$

$m = 2, 2 > 0 \rightarrow$ vienības parabola $y = x^2$ pārvietota 2 vienības pa Ox asi virzienā pa kreisi.

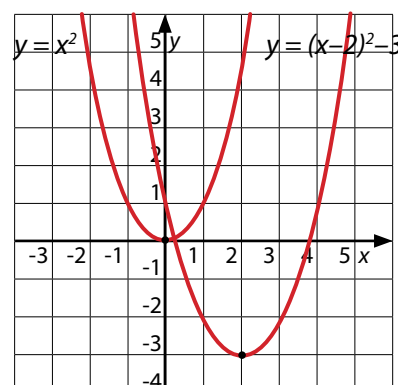


Grafiks $f(x) = (x + m)^2 + c$ ir vienības parabola, kas pārvietota $|m|$ vienības pa Ox asi virzienā pa kreisi, ja $m > 0$, vai pa labi, ja $m < 0$, un $|c|$ vienības pa Oy asi virzienā uz augšu, ja $c > 0$, vai uz leju, ja $c < 0$.



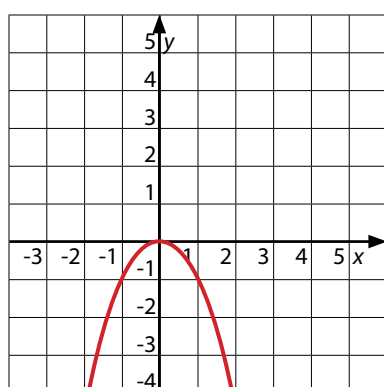
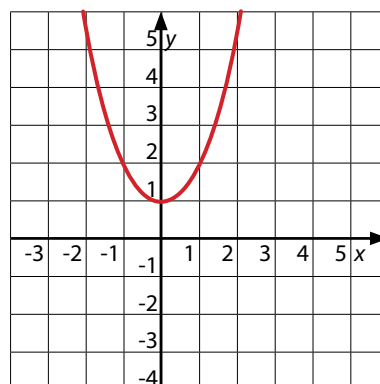
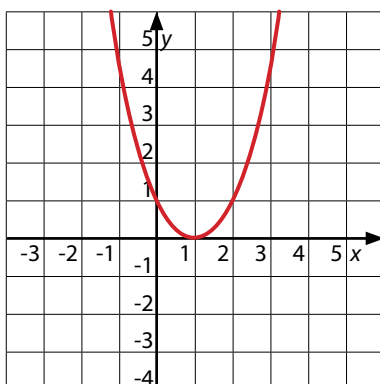
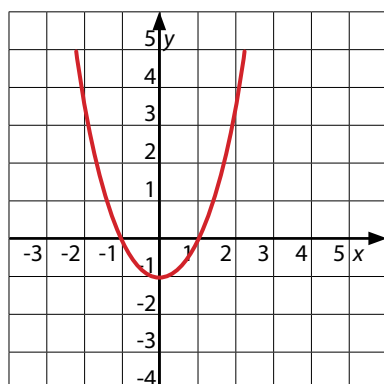
☑ $f(x) = (x - 2)^2 - 3$

$m = -2, -2 < 0; c = -3, -3 < 0 \rightarrow$ vienības parabola $y = x^2$ pārvietota 2 vienības pa Ox asi virzienā pa labi un 3 vienības pa Oy asi virzienā uz leju.



5. Zīmējumos uzskicēti funkciju grafiki. Savieto funkcijas izteiksmi un tai atbilstošo grafiku!

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = -x^2$ c) $f(x) = (x-1)^2$ d) $f(x) = x^2 - 1$



Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Nosaki parabolas $f(x) = -x + 7 - 5x^2$ zaru vērsumu!
- (2 p.) 2. Ar kādu b vērtību funkcijas $f(x) = x^2 + bx$ grafiks ietu caur punktu $(-1; 4)$?
- (3 p.) 3. Aprēķini parabolas $f(x) = x^2 - x$ virsotnes koordinātas!
- (3 p.) 4. Nosaki kvadrātfunkcijas $f(x) = x^2 - 6x$ saknes!
- (2 p.) 5. Funkcijas izteiksmē $f(x) = x^2 + 6$ skaitlis 6 norāda...
- (2 p.) 6. Funkcijas $f(x) = (x - 8)^2$ izteiksmē skaitlis -8 norāda...
- (7 p.) 7. Izmantojot vienības parabolu, uzzīmē funkcijas $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ grafiku! Nosaki:
 - a) $f(2)$
 - b) x , ja $f(x) = 5$
 - c) funkcijas vērtību apgabalu
 - d) funkcijas saknes
 - e) intervālus, kuros funkcija aug
 - f) intervālus, kuros funkcija ir pozitīva

20. Kvadrātnevienādība. Intervālu metode

Kvadrātnevienādība ir nevienādība, kuru var uzrakstīt šādi:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ vai } ax^2 + bx + c < 0 \text{ vai } ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ vai } ax^2 + bx + c \leq 0.$$



Kvadrātnevienādību piemēri ir šādi:

$$\checkmark 3x^2 + 2x - 5 > 0 \quad \checkmark x^2 - 2x - 3 < 0, \quad \checkmark -x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

$$\checkmark 5x^2 < 0, x^2 - 5x > 0, \quad \checkmark 3x^2 - 48 \leq 0$$

Kvadrātnevienādības atrisinājumi ir skaitļi, kurus ievietojot kvadrātnevienādībā, iegūst patiesu skaitlisko nevienādību.



☒ Lai noteiktu, vai skaitļi 1; 2; -1 ir kvadrātnevienādības $x^2 - 1 \leq 0$ atrisinājumi, rīkojas šādi:

→ izteiksmē $x^2 - 1$ mainīgā x vietā ievieto skaitli 1 → $1^2 - 1 \leq 0$

→ atrisina skaitlisko nevienādību un novērtē tās patiesumu → $0 \leq 0$

→ $0 \leq 0$ ir patiesa nevienādība, 1 ir nevienādības $x^2 - 1 \leq 0$ atrisinājums.

Līdzīgi pārbauda pārējos piemērā dotos skaitļus 2 un -1:

$$\rightarrow 2^2 - 1 \leq 0$$

→ $3 \leq 0$ – nav patiesa skaitliskā nevienādība

→ $x = 2$ nav kvadrātnevienādības $x^2 - 1 \leq 0$ atrisinājums

$$\rightarrow (-1)^2 - 1 \leq 0$$

→ $0 \leq 0$ – patiesa skaitliskā nevienādība

→ $x = -1$ ir kvadrātnevienādības $x^2 - 1 \leq 0$ atrisinājums

1. Vai skaitlis $x = -2$ ir nevienādības $x^2 - 5x + 6 < 0$ atrisinājums? Izvēlies vēl dažas x vērtības un pārbaudi, vai tās ir dotās kvadrātnevienādības atrisinājumi!

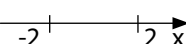
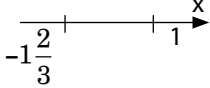
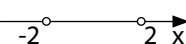
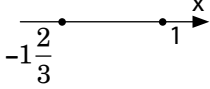
Kvadrātnevienādības risināšanai izmanto atbilstošās kvadrātfunkcijas īpašības!

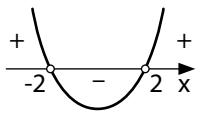
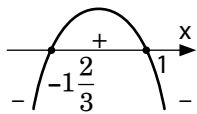
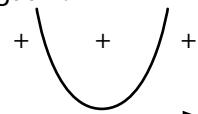
Kvadrātnevienādība	Atbilstošā kvadrātfunkcija
$x^2 - 2x - 3 < 0$	$f(x) = x^2 - 2x - 3$
$-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$	$f(x) = -2x^2 + 5x + 3$

Kvadrātnevienādība	Tā nosaka
$ax^2 + bx + c > 0$	intervālus, kur funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ir pozitīva
$ax^2 + bx + c < 0$	intervālus, kur funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ir negatīva
$ax^2 + bx + c \geq 0$	intervālus, kur funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ir pozitīva un vienāda ar nulli (funkcijas saknes)
$ax^2 + bx + c \leq 0$	intervālus, kur funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ ir negatīva un vienāda ar nulli (funkcijas saknes)

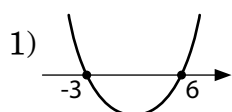
Kvadrātnevienādību risina šādi:

- ➔ nosaka nevienādībai atbilstošo kvadrātfunkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$
- ➔ aprēķina kvadrātfunkcijas $f(x) = ax^2 + bx + c$ saknes x_1 un x_2
 $\rightarrow ax^2 + bx + c = 0$
- ➔ uz skaitļu ass atliek funkcijas saknes, sadalot to intervālos
 $\rightarrow$ atkarībā no nevienādības zīmes atzīmē intervālu galapunktus tukšus $\circ$ (ja nevienādības zīme ir $<$ vai $>$) vai iezīmētus $\bullet$ (ja nevienādības zīme ir $\leq$ vai $\geq$)
- ➔ atkarībā no koeficienta a nosaka parabolas zaru vērsumu (ja $a > 0$, tad zari vērsti uz augšu, ja $a < 0$, tad zari vērsti uz leju)
- ➔ uzskicē parabolu; nosaka intervālus, kuros kvadrātfunkcija ir pozitīva, kuros tā ir negatīva
- ➔ no attēla nolasa nevienādības atrisinājumu un pieraksta kā intervālu

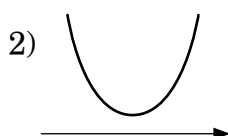
Kvadrātnevienādības atrisināšana	☒ $x^2 - 4 > 0$	☒ $-3x^2 - 2x + 5 \leq 0$	☒ $x^2 + 6 \leq 0$
1. Atbilstošā kvadrātfunkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = x^2 - 4$	$f(x) = -3x^2 - 2x + 5$	$f(x) = x^2 + 6$
2. Nosaka funkcijas saknes jeb atrisina vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 - 4 = 0$ $x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4}$ $x_1 = 2; x_2 = -2$	$-3x^2 - 2x + 5 = 0$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 64$ $x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = -1\frac{2}{3}$ $x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = 1$	$x^2 + 6 = 0$ $x^2 = -6$ $x = \pm\sqrt{-6}$ $\emptyset$ Funkcijai sakņu nav.
3. Uz skaitļu ass atzīmē funkcijas saknes			
4. Atzīmē intervālu galapunktus atbilstoši nevienādības zīmei. Ja nevienādības zīme ir $<$ vai $>$, tad galapunkti ir tukši $\circ$, ja nevienādības zīme $\leq$ vai $\geq$, tad tie ir iezīmēti $\bullet$.	Nevienādības zīme $>$, tāpēc intervālu galapunkti ir tukši. 	Nevienādības zīme $\leq$, tāpēc intervālu galapunkti ir iezīmēti. 	Funkcijai nav sakņu, tad nav arī intervālu galapunktu. 
5. Koeficients a norāda parabolas zaru vērsumu. Ja $a > 0$, tad parabolas zari vērsti uz augšu, ja $a < 0$, tad tie vērsti uz leju.	Koeficients pie x^2 ir 1 ($a = 1$), parabolas zari vērsti uz augšu.	Koeficients pie x^2 ir -3 ($a = -3$), parabolas zari vērsti uz leju.	Koeficients pie x^2 ir 1 ($a = 1$), parabolas zari vērsti uz augšu.

6. Ieski parabolus caur punktiem, kas ir funkcijas nulles, un nosaka funkcijas zīmes intervālos. Funkcija ir pozitīva, ja funkcijas grafiks atrodas virš Ox ass. Funkcija ir negatīva, ja funkcijas grafiks atrodas zem Ox ass.	Dotā nevienādība ir $x^2 - 4 > 0$, tātad atrisinājums ir intervāli, kur funkcija ir pozitīva (+). 	Dotā nevienādība ir $3x^2 + 2x - 5 \leq 0$, tātad atrisinājums ir intervāli, kur funkcija ir negatīva (-) un šo intervālu galapunkti arī ir negatīvi. 	Dotā nevienādība ir $x^2 + 6 \leq 0$, tātad atrisinājums ir intervāli, kur funkcija ir negatīva (-) un šo intervālu galapunkti arī ir negatīvi. 
7. Atbilde.	$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$	$x \in (-\infty; -1\frac{2}{3}] \cup [1; +\infty)$	$\emptyset$ (nav atrisinājuma)

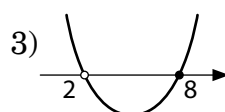
2. Attēlos ir doti kvadrātfunkciju grafiki. Pēc grafikiem nosaki doto nevienādību atrisinājumus!



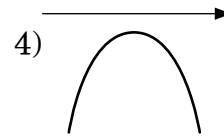
- a) $y > 0$, ja $x \dots$
b) $y \leq 0$, ja $x \dots$



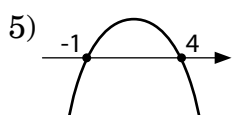
- a) $y < 0$, ja $x \dots$
b) $y \geq 0$, ja $x \dots$



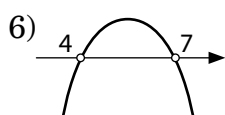
- a) $y > 0$, ja $x \dots$
b) $y \leq 0$, ja $x \dots$



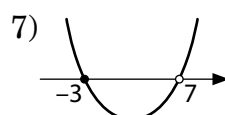
- a) $y < 0$, ja $x \dots$
b) $y \geq 0$, ja $x \dots$



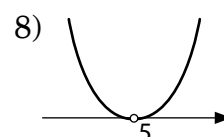
- a) $y < 0$, ja $x \dots$
b) $y \leq 0$, ja $x \dots$



- a) $y > 0$, ja $x \dots$
b) $y \geq 0$, ja $x \dots$



- a) $y < 0$, ja $x \dots$
b) $y \leq 0$, ja $x \dots$



- a) $y > 0$, ja $x \dots$
b) $y \geq 0$, ja $x \dots$

3. Atrisini kvadrātnevienādības!

a) $x^2 - 81 > 0$

c) $8x^2 - 4x \leq 0$

e) $2x^2 + 7x - 4 > 0$

g) $2x(x + 1) > x + 10$

b) $2x^2 < 32$

d) $-6x \geq x^2$

f) $3x^2 - 11x + 6 > 0$

h) $x^2 + 5 \leq (2x - 1)^2$

☒ Lai noskaidrotu, pie kādām mainīgā x vērtībām izteiksmes x^2 vērtība pārsniedz $-x^2 - 3x + 2$ vērtību, rīkojas šādi:

→ sastāda atbilstošo kvadrātnevienādību → $x^2 > -x^2 - 3x + 2$

→ risina kvadrātnevienādību → $x^2 > -x^2 - 3x + 2$

$$x^2 + x^2 + 3x - 2 > 0$$

$$2x^2 + 3x - 2 > 0$$

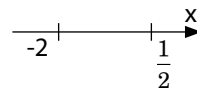
→ pieraksta atbilstošo kvadrātfunkciju → $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

→ aprēķina funkcijas saknes, izmantojot diskriminanta un sakņu formulas → $2x^2 + 3x - 2 = 0$

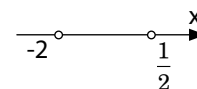
$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -2$$

→ uz skaitļu ass atzīmē funkcijas saknes

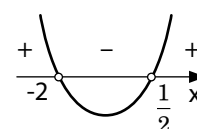


→ atzīmē intervālu galapunktus (o),
ņemot vērā nevienādības zīmi (>)



→ pārbauda parabolas zaru vērsumu,
→ tā kā $a = 2$, tad parabolas zari vērsti uz augšu

→ uzskicē parabolu, nosaka intervālus,
kuros funkcija ir pozitīva vai negatīva →



→ no zīmējuma nolasa nevienādības atrisinājumu

$$\rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$$

Atbilde. Izteiksmes x^2 vērtība pārsniedz $-x^2 - 3x + 2$ vērtību,
ja $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.

Intervālu metode

Intervālu metodi izmanto, lai risinātu kvadrātnevienādības.

☒ Lai atrisinātu kvadrātnevienādību $x^2 - 16 \geq 0$ ar **intervālu metodi**, rīkojas šādi:

→ aprēķina kvadrātfunkcijas $f(x) = x^2 - 16$ saknes → $x^2 - 16 = 0$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

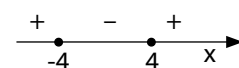
→ funkcijas saknes atzīmē uz koordinātu taisnes, ņemot vērā nevienādības zīmi $\geq$ →



→ katrā intervālā nosaka funkcijas zīmi

Intervāls	Izvēlas skaitli no intervāla	Aprēķina funkcijas vērtību un noskaidro, vai tā ir pozitīva vai negatīva
$(-\infty; -4)$	-5	$(-5)^2 - 16 = 25 - 16 = 9 > 0$
$(-4; 4)$	0	$0^2 - 16 = 0 - 16 = -16 < 0$
$(4; +\infty)$	6	$6^2 - 16 = 36 - 16 = 20 > 0$

→ intervālos, kur funkcijas vērtība ir pozitīva, ieliek „+” zīmi, kur negatīva, tur liek „-” zīmi



- no attēla nolasa nevienādības atrisinājumu, → tā kā $x^2 - 16 \geq 0$, tad par atrisinājumu der tie intervāli, kur funkcija ir pozitīva un funkcijas saknes arī ir pozitīvas, t. i., $x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

☒ Lai atrisinātu kvadrātnevienādību $x^2 - 5x < 0$ ar intervālu metodi, rīkojas šādi:

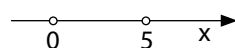
- aprēķina kvadrātfunkcijas $f(x) = x^2 - 5x$ saknes, pielīdzinot funkcijas izteiksmi nullei → $x^2 - 5x = 0$

$$x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x - 5 = 0$$

$$x_2 = 5$$

- atzīmē saknes uz koordinātu taisnes, pārbauda, vai intervālu galapunkti ir tukši un vai iezīmēti, → intervālu galapunkti ir tukši, jo nevienādības zīme ir >

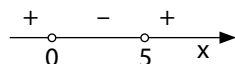


- nosaka funkcijas zīmi katrā intervālā

Intervāls	Izvēlas skaitli no intervāla	Aprēķina funkcijas vērtību un noskaidro, vai tā ir pozitīva vai negatīva
$(-\infty; 0)$	-1	$(-1)^2 - 5 \cdot (-1) = 1 + 5 = 6 > 0$
$(0; 5)$	1	$1^2 - 5 \cdot 1 = 1 - 5 = -4 < 0$
$(5; +\infty)$	6	$6^2 - 5 \cdot 6 = 36 - 30 = 6 > 0$

- intervālos, kur funkcijas vērtība ir pozitīva,

atzīmē „+” zīmi, kur negatīva tur ar „-” zīmi →



- pieraksta nevienādības atrisinājumu, ievērojot nevienādības zīmi, → par atrisinājumu der tie intervāli, kur ir - zīme, t. i., $x \in (0; 5)$.

☒ Lai atrisinātu nevienādību $5x^2 < 0$ ar intervālu metodi, rīkojas šādi:

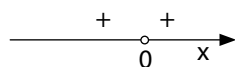
- aprēķina kvadrātfunkcijas $f(x) = 5x^2$ saknes → $5x^2 = 0$

$$x^2 = 0 : 5$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

- uz koordinātu taisnes atzīmē $x = 0$ kā tukšu punktu, jo nevienādības zīme ir <



- nosaka funkcijas zīmi katrā intervālā

Intervāls	Izvēlas skaitli no intervāla	Aprēķina funkcijas vērtību un noskaidro, vai tā ir pozitīva vai negatīva
$(-\infty; 0)$	-1	$5 \cdot (-1)^2 = 5 \cdot 1 = 5 > 0$
$(0; +\infty)$	1	$5 \cdot 1^2 = 5 \cdot 1 = 5 > 0$

Tā kā nav intervāla, kur funkcija būtu negatīva, tad nevienādībai nav atrisinājuma.

Atbilde. ∅

Ar intervālu metodi var risināt arī sarežģītākas nevienādības.

☒ Lai atrisinātu nevienādību $(x - 2)(x - 5)(x + 3) > 0$ ar intervālu metodi, rīkojas šādi:

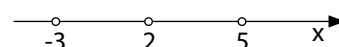
→ nosaka funkcijas $f(x) = (x - 2)(x - 5)(x + 3)$ saknes

$$\rightarrow (x - 2)(x - 5)(x + 3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{vai} \quad x - 5 = 0 \quad \text{vai} \quad x + 3 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = -3$$

→ atzīmē saknes uz koordinātu taisnes, pārbauda, vai intervālu galapunkti ir tukši vai iezīmēti, → punkti $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = -3$ ir tukši



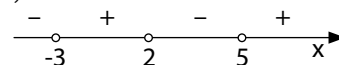
→ nosaka funkcijas zīmi katrā intervālā

Intervāls	Izvēlas skaitli no intervāla	Aprēķina funkcijas vērtību un noskaidro, vai tā ir pozitīva vai negatīva
$(-\infty; -3)$	-4	$(-4 - 2)(-4 - 5)(-4 + 3) = -54 < 0$
$(-3; 2)$	0	$(0 - 2)(0 - 5)(0 + 3) = 30 > 0$
$(2; 5)$	3	$(3 - 2)(3 - 5)(3 + 3) = -12 < 0$
$(5; +\infty)$	6	$(6 - 2)(6 - 5)(6 + 3) = 36 > 0$

→ intervālos, kur funkcijas vērtība ir pozitīva,

atzīmē „+” zīmi, kur negatīva tur

atzīmē „-” zīmi →



→ pēc attēla nosaka nevienādības atrisinājumu, ievērojot nevienādības zīmi, → atrisinājums ir intervāli, kur ir + zīme

Atbilde. $x \in (-3; 2) \cup (5; +\infty)$.

☒ Lai atrisinātu daļveida nevienādību $\frac{x - 3}{(x + 2)x} \geq 0$ ar intervālu metodi, rīkojas šādi:

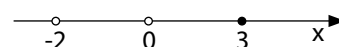
→ nosaka funkcijas $f(x) = \frac{x - 3}{(x + 2)x}$ saknes un vērtības, ar kurām funkcija nav definēta

$$\rightarrow \frac{x - 3}{(x + 2)x} = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{un} \quad x + 2 \neq 0, \quad \text{un} \quad x \neq 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 \neq -2 \quad x_3 \neq 0$$

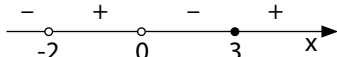
→ atzīmē saknes uz koordinātu taisnes, nosaka, vai intervālu galapunkti ir tukši vai iezīmēti → punkti $x_2 = -2, x_3 = 0$ ir tukši, jo šajos punktos funkcija nav definēta, bet $x_1 = 3$ ir iezīmēts punkts



→ nosaka funkcijas zīmi katrā intervālā

Intervāls	Izvēlas skaitli no intervāla	Aprēķina funkcijas vērtību un noskaidro, vai tā ir pozitīva vai negatīva
$(-\infty; -2)$	-4	$\frac{-4-3}{(-4+2)(-4)} = \frac{-7}{(-2) \cdot (-4)} = \frac{-7}{8} = -\frac{7}{8} < 0$
$(-2; 0)$	-1	$\frac{-1-3}{(-1+2)(-1)} = \frac{-4}{1 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-1} = 4 < 0$
$(0; 3)$	2	$\frac{2-3}{(2+2)2} = \frac{-1}{4 \cdot 2} = \frac{-1}{8} = -\frac{1}{8} < 0$
$(3; +\infty)$	4	$\frac{4-3}{(4+2)4} = \frac{1}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24} < 0$

→ intervālos, kur funkcijas vērtība ir pozitīva,

ieliek + zīmi, kur negatīva – ar – zīmi → 

→ nosaka nevienādības atrisinājumu, ievērojot nevienādības zīmi,
→ atrisinājums ir intervāli, kur ir atzīmēta + zīme →

Atbilde. $x \in (-3; 2) \cup (5; +\infty)$.

4. Atrisini kvadrātnevienādības ar intervālu metodi!

a) $(x-6)(x+9) > 0$

d) $\frac{x-1}{x} > 0$

g) $\frac{x-10}{x^2-5x} \leq 0$

b) $(x+1)(x-5)(x+4) \leq 0$

e) $\frac{x+2}{(x+1) \cdot (x-3)} \geq 0$

h) $\frac{x^2+8x}{x^2-9} > 0$

c) $(x^2-1)(x^2-25) \geq 0$

f) $\frac{(x+6) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-4)} < 0$

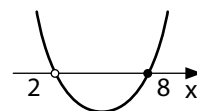
i) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+4} > 0$

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

(1 p.) 1. Nosaki, vai skaitlis -1 ir nevienādības $x^2 > 0$ atrisinājums!

(1 p.) 2. Pēc kvadrātfunkcijas grafika nosaki nevienādības $y > 0$ atrisinājumus (skat. att.)!



(2 p.) 3. Atrisini kvadrātnevienādību $x^2 - 36 < 0$!

(2 p.) 4. Atrisini kvadrātnevienādību $x^2 + 2x \geq 0$!

(2 p.) 5. Atrisini kvadrātnevienādību $2x^2 - 9x - 5 \leq 0$!

- (2 p.) 6. Pie kādām mainīga x vērtībām izteiksmes x^2 vērtība pārsniedz $-x^2 + 8$ vērtību?
- (2 p.) 7. Atrisini kvadrātnevienādību $(x + 2)(x - 1) < 0$ ar intervālu metodi!
- (2 p.) 8. Atrisini kvadrātnevienādību $\frac{x+1}{x} \leq 0$ ar intervālu metodi!
- (3 p.) 9. Nosaki kvadrātnevienādības $x^2 + 3x - 4 < 0$ lielāko veselo atrisinājumu!
- (3 p.) 10. Nosaki kvadrātnevienādības $-5x^2 - 2x < 0$ mazāko veselo atrisinājumu!

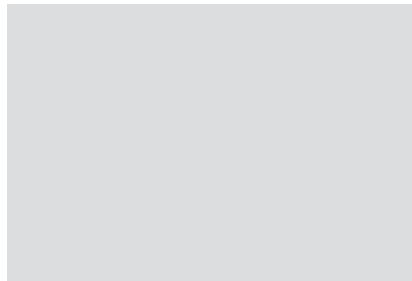
21. Riņķis, tā elementi.

Centra lenķis un ievilkts lenķis

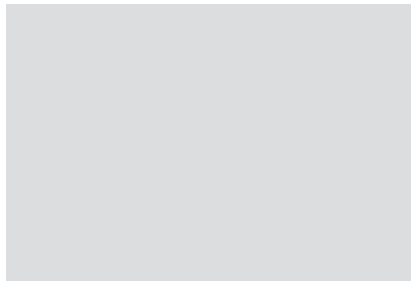
Riņķa līnija ir līnija, kuras visi punkti atrodas vienādā attālumā no riņķa līnijas centra, ko parasti apzīmē ar burtu O.



Aplūko riņķa līnijas piemērus!



Riepa



Gredzens

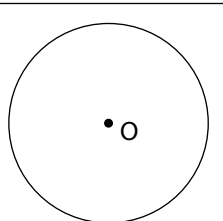
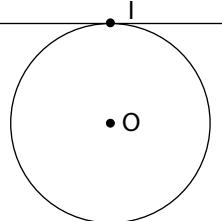
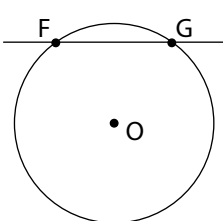


Ciparnīca

Riņķis ir plaknes daļa, kuru ierobežo riņķa līnija.



☒ Cik kopīgu punktu var būt taisnei un riņķa līnijai?

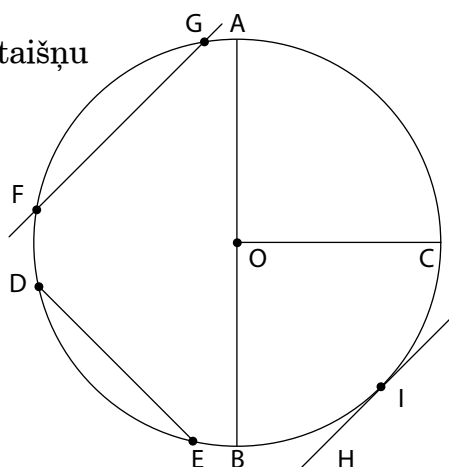
 Nav kopīga punkta	 Viens kopīgs punkts I Taisne pieskaras riņķa līnijai	 Divi kopīgi punkti F un G Taisne krusto riņķa līniju
---	--	--

Aplūko riņķa attēlu!

Atkārto riņķa līnijas raksturīgo taišņu un nogriežņu nosaukumus!

Sekante FG
taisne, kas savieno krusto līniju divos punktus

Horda DE
nogrieznis, kas savieno riņķa līnijas divus punktus



Rādiuss OC

nogrieznis, kas savieno riņķa līnijas centru un jebkuru riņķa līnijas punktu

Diametrs AB

horda, kas iet caur riņķa līnijas centru

Pieskare HI

taisne, kas pieskaras riņķa līnijai vienā punktā I

Riņķa līniju, kuras centrs ir O un rādiuss ir 3 cm, apzīmē šādi: **R. l. (O; 3 cm).**

- ☑ *Dota R. l. (O; 4 cm) un trīs punkti A, B, C, OA = 2 cm, OB = 4 cm, OC = 6 cm. Ko var secināt par riņķa un punktu savstarpējo novietojumu?*

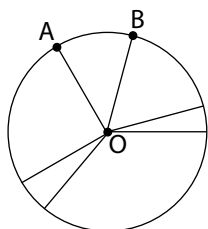
1. OA = 2 cm, OA < 4 cm. Punkts A atrodas riņķa iekšpusē.
2. OB = 4 cm, OB = 4 cm. Punkts B atrodas uz riņķa līnijas.
3. OC = 6 cm, OC > 4 cm. Punkts C atrodas ārpus riņķa līnijas.

1. *Dota riņķa līnija ar centru O un rādiusu 5 cm. Nosaki, kur atrodas punkts M, ja OM = 3 cm!*

2. *Uzzīmē R. l. (O; 4 cm)! Novelc rādiusu OA un pieskari AB! Nosaki savstarpējo rādiusa un pieskares novietojumu!*

Riņķa līnijas un tās raksturīgo nogriežņu īpašības

Riņķa līnijas rādiusu parasti apzīmē ar r , bet diametru – ar d .



1. att.

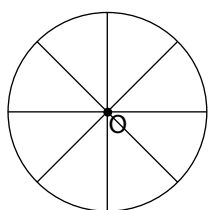


Visi vienas riņķa līnijas rādiusi ir vienādi (1. att.)

- ☑ *Dota R. l. (O; 2 cm). Uz riņķa līnijas atlikti punkti A un B (1. att.).*

Trijstūris AOB ir vienādsānu trijstūris, jo OA=OB= r .

3. *Riņķa līnijā ar centru O novilkta horda CD, kuras garums ir vienāds ar rādiusa garumu. Nosaki trijstūra COD veidu!*

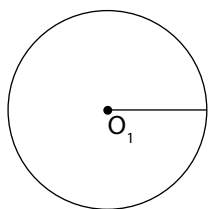


2. att.



Visi vienas riņķa līnijas diametri ir vienādi. (2. att.)
Diametra garums ir vienāds ar divu rādiusu garumu summu. To pieraksta šādi: $d = 2 \cdot r$

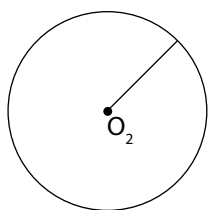
4. *Riņķa līnijas rādiuss ir $3\frac{1}{2}$ cm. Aprēķini riņķa līnijas diametru!*



3. att.



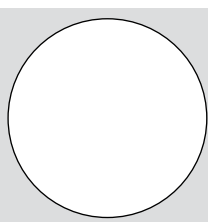
Divas riņķa līnijas ir vienādas, ja ir vienādi to rādiusi vai diametri (3. att.)
 $r_1 = r_2 \rightarrow R. l.(O_1; r_1) = R. l.(O_2; r_2)$



4. att.

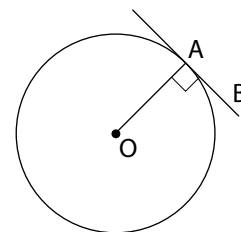


Riņķa līnija sadala plakni divās daļās – viena daļa ir riņķa līnijas iekšpusē (riņķis), otrā daļa – riņķa līnijas ārpusē (4. att.).



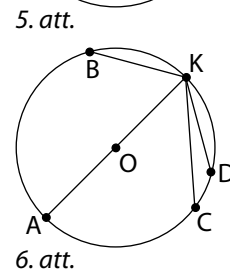
4. att.

Riņķa līnijas pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kurš novilkts pieskaršanās punktā.
Ja OA – rādiuss, AB – pieskare, tad $OA \perp AB$ (5. att.).



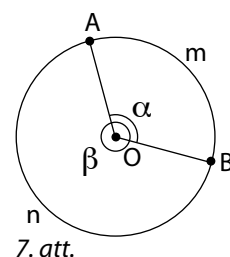
- ☒ Uz riņķa līnijas atlikts punkts K. Cik rādiusu, diametru un hordu var novilkt caur šo punktu?

Atbilde. Caur punktu K var novilkt vienu rādiusu OK, vienu diametru AK un bezgalīgi daudz hordu (piemēram, BK, CK, DK, ka arī AK, jo diametrs ir visgarākā horda) (6. att.).



5. Uz riņķa līnijas atzīmēts punkts M. Nosaki, cik pieskaru var novilkt caur šo punktu!

Ja uz riņķa līnijas atzīmē divus punktus, iegūst divus **riņķa līnijas lokus** (7. att.).



7. att. ir loki $\cup AmB$ un $\cup AnB$.

Katru riņķa līnijas loku raksturo **centra leņķis**.

Centra leņķis ir leņķis, kura virsotne atrodas riņķa līnijas centrā, bet malas krusto riņķa līniju.



7. att. lokam AmB atbilst centra leņķis α , bet lokam AnB atbilst leņķis β .

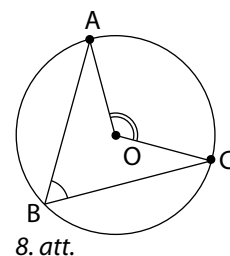
Lokus mēra grādos. Loka **leņķiskais lielums** ir vienāds ar tam atbilstošā centra leņķa lielumu.

$\cup AmB = 120^\circ$ lasa šādi: „Loka AmB leņķiskais lielums ir 120° ”.

☑ Ja $\alpha = 120^\circ$, tad arī $\cup AmB = 120^\circ$

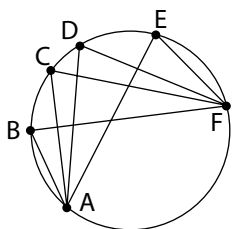
☑ Ja $\beta = 240^\circ$, tad arī $\cup AnB = 240^\circ$

Ievilkts leņķis ir leņķis, kura virsotne ir uz riņķa līnijas, bet malas krusto riņķa līniju.



Ja ievilkta un centra leņķa malas krusto riņķa līniju vienos un tajos pašos punktos A un B (8. att.), tad saka, ka leņķi atbilst viens otram.

Ievilkta lenķa īpašības



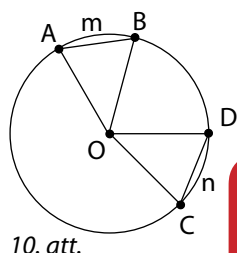
9. att.



Ievilkti lenķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi (9. att.).

$$\angle ABF = \angle ACF = \angle ADF = \angle AEF.$$

Ievilkta lenķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi.



10. att.

6. Dots. R. l. $(O; r), \cup A m B = \cup C m D$

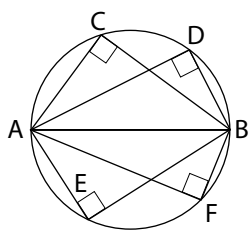
(*skat. 10. att.*). Pierādīt, ka $\triangle AOB = \triangle AOD$!



Ievilkta lēnči, kas balstās uz diametra, ir taisni (11. att.).

AB – diametrs

$$\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = \angle AFB = 90^\circ$$



11. att.

7. 11. attēlā redzamo hordu AD un DB attiecība ir 4 : 3.

Aprēķini trijstūra ABD perimetru, ja rinka līnijas rādiuss ir 5 cm!



Ievilkts lenķis ir divreiz mazāks nekā tam atbilstošais centra lenķis.

Centra lenķis ir divreiz lielāks nekā tam atbilstošais ievilkts lenķis.

☑ Ja $\angle AOC = 120^\circ$, tad $\angle ABC = 120^\circ : 2 = 60^\circ$ (skat. 8. att.)

☑ Ja $\angle ABC = 80^\circ$, tad $\angle AOC = 80^\circ \cdot 2 = 160^\circ$ (*skat. 8. att.*).

8. Uzzīmē R . l (O; 5 cm)! Konstruē centra lenki COD, kura

lielums ir 60° , un tam atbilstošu ievilkto lenki CKD!

Cik liels ir lenķis CKD?

9. Ievilkts lenķis ir par 60° mazāks nekā tam atbilstošais centra lenķis.

Aprēķini abu lenķu lielumus!



Rīnka līnijas garumu aprēķina pēc formulas $C = 2\pi r$.

Rīnka laukumu rēķina pēc formulas $S = \pi r^2$, $\pi = 3,14$.

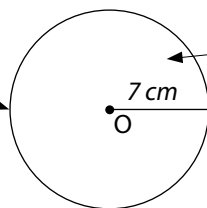
☒ *Dots. R. l.* (O; 7 cm)

Aprēķināt. Riņķa līnijas garumu C un riņķa laukumu S .

Riņķa līnijas garums

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 7 = 43,96(\text{cm})$$



Riņķa laukums

$$S = \pi r^2$$

$$S = 3,14 \cdot 49 = 153,86(\text{cm}^2)$$

10. Aizpildi tabulu ($\pi=3,1$)!

Rādiuss r	Diametrs d	Riņķa līnijas garums $C = 2\pi r$	Riņķa līnijas laukums $S = \pi r^2$
2cm			
	6cm		
		31cm	
			49,6cm ²

11. Aplūko 12. attēlu! Konstruē riņķa līniju! Papildini atrisinājumu!

Dots. R. l. (O; 5cm), AC – diametrs, AB = 6cm.

Aprēķināt. BC.

Atrisinājums.

- 1) Tā kā riņķa līnijas rādiuss ir ... cm, tad tās diametrs ir ... cm

$$AC = 5 \cdot 2 = 10(\text{cm})$$

- 2) Trijstūrī ... centra leņķis AOC ir ... leņķis, tātad $\angle AOC = 180^\circ$.

- 3) Centra leņķim AOC atbilst ievilkts leņķis ... Ievilkts leņķis ir ... reizi mazāks nekā tam atbilstošais centra leņķis, tātad $\angle ABC = \angle AOC : 2 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$

- 4) Ja $\angle ABC = 90^\circ$, secinām, ka $\triangle ABC$ ir ... trijstūris.

- 5) Taisnleņķa trijstūrī ABC mala AB ir ..., bet riņķa līnijas diametrs ir ...

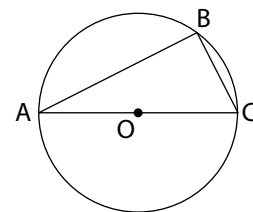
Izmantot Pitagora teorēmu:

$$AB^2 + \dots = \dots$$

$$6^2 + BC^2 = 10^2$$

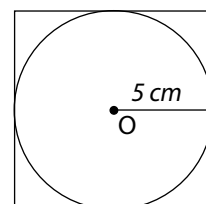
.....

$$BC = \dots (\text{cm})$$



12. att.

12. Aplūko 13. attēlu! Riņķa rādiuss ir ... cm. Aprēķini apvilktā kvadrāta perimetra un riņķa līnijas garuma attiecību!



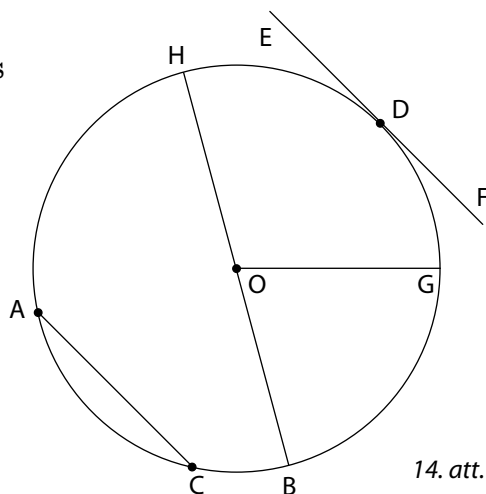
13. att.

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (5 p.) 1. Pieraksti 14. attēlā redzamās riņķa līnijas apzīmējumu!

Pieraksti riņķa līnijas raksturīgo taisņu un nogriežņu apzīmējumus un nosaukumus!



- (2 p.) 2. Cik daļās plakni sadala divas riņķa līnijas?
Norādi visus iespējamus gadījumus!

- (4 p.) 3. Riņķa līnijas rādiuss ir $\sqrt{2}$ cm.
Aprēķini

- a) riņķa līnijas diametru
- b) riņķa līnijas garumu
- c) riņķa laukumu!

- (4 p.) 4. Riņķa līnijas diametru palielināja 2 reizes.
Kā izmainījās

- a) riņķa līnijas rādiuss
- b) riņķa līnijas garums
- c) riņķa laukums?

- (2 p.) 5. Riņķa līnija ar centru O un rādiusu 4 cm.
Aprēķini hordas AB garumu, ja $\angle AOB = 60^\circ$!

- (3 p.) 6. Riņķī ar centru O hordas $BC = 3$ cm un $CD = 4$ cm veido taisnu leņķi. Nosaki riņķa diametru!

22. Taisnleņķa trijstūris. Trigonometriskās funkcijas. Pitagora teorēma

Trijstūris, kura viens leņķis ir taisns (90°), ir **taisnleņķa trijstūris**. Mala, kura atrodas pretī taisnajam leņķim, ir **hipotenūza**. Taisnā leņķa malas ir **katetes**.

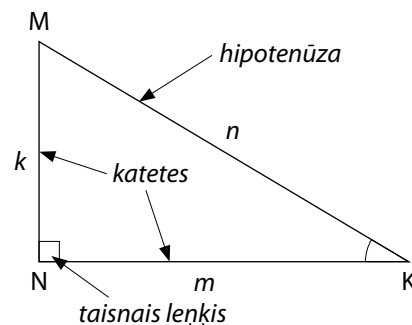


$\triangle MNK$ ir **taisnleņķa trijstūris**, $\angle N = 90^\circ$.

Trijstūra malas apzīmē ar mazajiem burtiem atbilstoši pretī esošajiem leņķiem. $MK = n$, $MN = k$, $NK = m$.

Mala k jeb MN – leņķa M **piekatete** un leņķa K **pretkatete**.

Mala m jeb NK – leņķa K **piekatete** un leņķa M **pretkatete**.



Trigonometriskās funkcijas taisnleņķa trijstūrī

Leņķa **sinuss** ir **pretkatetes** attiecība

pret **hipotenūzu**. $\sin \angle K = \frac{MN}{MK}$

Leņķa **kosinuss** ir **piekatetes** attiecība

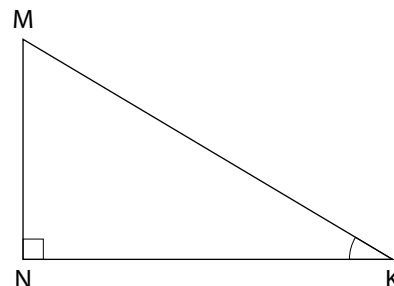
pret **hipotenūzu**. $\cos \angle K = \frac{NK}{MK}$

Leņķa **tangenss** ir **pretkatetes** attiecība

pret **piekateti**. $\operatorname{tg} \angle K = \frac{MN}{NK}$

Leņķa **kotangenss** ir **piekatetes** attiecība

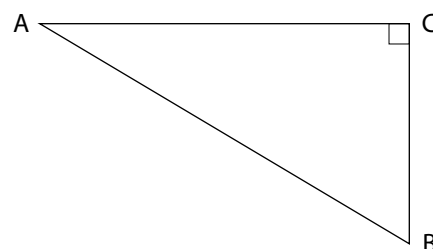
pret **pretkateti**. $\operatorname{ctg} \angle K = \frac{NK}{MN}$



1. Uzraksti attiecības, kas izsaka leņķa A sinusu, kosinusu, tangensu un kotangensu!

Apzīmē leņķu pretmalas ar atbilstošajiem mazajiem burtiem!

Uzraksti attiecības, kas izsaka leņķa B sinusu, kosinusu, tangensu un kotangensu!



Tabulā apkopotas aprēķinos biežāk izmantojamo leņķu trigonometrisko funkciju vērtības

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Dažu trigonometrisko funkciju vērtības:

$$\checkmark \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \checkmark \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \checkmark \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

2. Izmantojot tabulu, pabeidz iesākto!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sin \dots^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{c) } \operatorname{tg} \dots^\circ = \sqrt{3} & \text{e) } \cos \dots^\circ = \frac{1}{2} \\ \text{g) } \operatorname{tg} \dots^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ & \text{b) } \cos 30^\circ = \dots & \text{d) } \operatorname{ctg} 45^\circ = \dots \\ \text{f) } \sin 60^\circ = \dots & \text{h) } \sin 45^\circ = \cos \dots^\circ & \end{array}$$

☒ Trigonometrija plaukstā.

Pārliecinies, ka, izvēršot plaukstu un izmērot leņķus starp mazo pirkstu un pārējiem [pirkstiem, kā redzams zīmējumā, iegūst 30°, 45°, 60° un 90° leņķus.

Sanumurē pirkstus, sākot ar mazo pirkstu,

tam piešķirot numuru 0. Izmantojot formulu $\sin \alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$,

kur n – pirksta numurs, var noteikt sinusa vērtības:

$$\sin 0^\circ = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0, \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 90^\circ = 1.$$

Kosinusa vērtības iegūst, ja pirkstu numerāciju sāk ar lielo pirkstu, bet leņķus nemaina.

Pitagora teorēma

Vairāk nekā 1000 gadus p. m. ē. praktiskajos uzdevumos tika lietoti vēlāk zinātnieka vārdā nosauktie „Pitagora skaitļi” **3; 4; 5**. Teorēmas vispārīgais pierādījums ir zināms kopš VI gs. p. m. ē. Ar matemātiku saistītajā literatūrā ir atrodami ap 300 šīs teorēmas pierādījumu.

Taisnleņķa trijstūrī **hipotenūzas** garuma **kvadrāts** ir **vienāds** ar **katešu** garumu **kvadrātu summu**. $c^2 = a^2 + b^2$



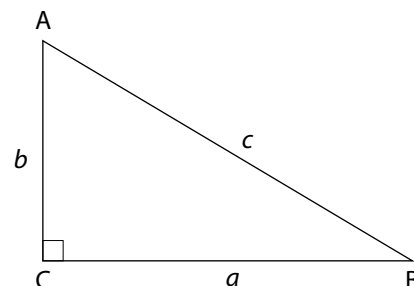
- ☒ *Dots.* Taisnleņķa trijstūris ABC,
 $\angle C$ – taisns leņķis, malas $AB = 10$ cm, $AC = 5$ cm.
Jāaprēķina. Mala BC, $\angle A$ un $\angle B$.

Atrisinājums.

Lai atrisinātu doto uzdevumu, rīkojas šādi:

- ievieto dotos lielumus Pitagora teorēmā
 $AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow 10^2 = 5^2 + BC^2$
- izsaka nezināmās malas kvadrātu
 $\rightarrow BC^2 = 100 - 25 = 75$
- malas garumu iegūst, izvelkot kvadrātsakni
 $\rightarrow BC = 5\sqrt{3}$ (cm)
- izteiksmē $\cos A = \frac{AC}{AB}$ ievieto zināmos lielumus
 $\rightarrow \cos A = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- nosaka leņķa A lielumu grādos $\rightarrow \angle A = 60^\circ$
- aprēķina leņķi B $\rightarrow \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, jo taisnleņķa trijstūra šauro leņķu summa ir 90°

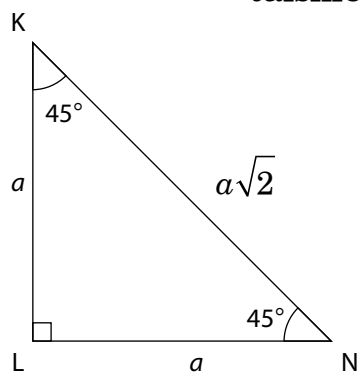
Atbilde. $BC = 5\sqrt{3}$ cm, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$



3. Uzzīmē taisnleņķa trijstūri ABC, $\angle C = 90^\circ$! Aizpildi tabulu!

N. p.k.	Malas			Trigonometrisko funkciju vērtības				Leņķi	
	a	b	c	$\sin \angle A$	$\cos \angle B$	$\operatorname{tg} \angle A$	$\operatorname{ctg} \angle B$	A	B
1.	5	12						–	–
2.		7						45°	
3.	9		15					–	–
4.		6							60°

Uzdevumu risināšanā izmanto divas svarīgas **likumsakarības taisnleņķa trijstūros**.



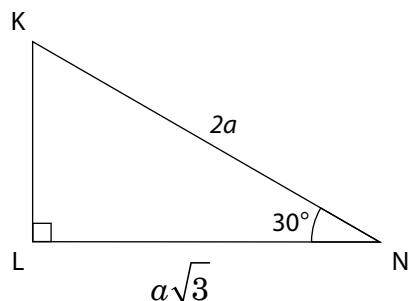
1) **Vienādsānu taisnleņķa trijstūrī**

- **hipotenūza** ir $\sqrt{2}$ reizes **garāka** nekā **katete**,
- **šaurā leņķu** lielumi ir 45° .

☒ Ja katetes ir 2 cm, tad hipotenūza ir $2\sqrt{2}$ cm.

☒ Ja hipotenūza ir 5 cm, tad katetes ir

$$5 : \sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2,5\sqrt{2} \text{ cm}$$



2) Ja taisnleņķa trijstūrī viens **šaurais leņķis** ir 30° ,

- tad šī leņķa **pretkatetes** garums ir **puse** no **hipotenūzas** garuma,
- **piekatetes** garums ir $\sqrt{3}$ reizes lielāks nekā **pretkatetes** garums.

$\triangle KLN$, $\angle L = 90^\circ$, $\angle N = 30^\circ$.

Ja $KL = 3$ cm, tad $KN = 6$ cm un $LN = 3\sqrt{3}$ cm.

☒ Ja $KN = 1$ m, tad $KL = 0,5$ m un $LN = 0,5\sqrt{3}$ m.

- No diviem vienādiem vienādsānu taisnleņķa trijstūriem ar kopīgu 4 cm garu kateti izveidots trijstūris. Nosaki iegūtā trijstūra veidu un aprēķini tā malas!
- Kvadrātā ar 7 cm garu malu ievilkts otrs kvadrāts tā, ka tas savieno punktus, kuri kvadrāta malas sadala 3 cm un 4 cm garos gabalos. Aprēķini ievilkta kvadrāta malu!
- Taisnleņķa trapeces īsākā sānu mala ir 14 cm un tā ir vienāda ar īsāko pamatu, bet šaurais leņķis ir 30° . Aprēķini garāko sānu malu un garāko pamatu!
- Vienādsānu trijstūrī ABC pamats $AC = 24$ cm. Novelc augstumu BD! Aprēķini
 - sānu malas, ja $BD = 5$ cm;
 - augstumu BD, ja sānu mala $AB = 20$ cm!
- Romba diagonāles ir 16 cm un 12 cm. Aprēķini romba malu!

Taisnleņķa trijstūra pazīme

(Pitagora teorēmas apgrieztā teorēma)

Ja trijstūra vienas malas garuma kvadrāts ir vienāds ar abu pārējo malu garumu kvadrātu summu, tad šīs malas pretleņķis ir taisns un tas ir taisnleņķa trijstūris.



☒ Lai noteiktu, vai trijstūris, kura malu garumi ir 2 dm, 3 dm un $\sqrt{6}$ dm, ir taisnleņķa trijstūris, rīkojas šādi:

→ novērtē, kura mala trijstūrī ir garākā → $2 < \sqrt{6} < 3$

→ aprēķina malu garumu kvadrātus → $3^2 = 9$, $2^2 = 4$, $(\sqrt{6})^2 = 6$

→ pārbauda, vai garākās malas kvadrāts ir vienāds ar īsāko malu kvadrātu summu → $9 \neq 4 + 6$

→ izdara secinājumu: → nav taisnleņķa trijstūris, jo nav spēkā Pitagora teorēmas apgrieztā teorēma.

Atbilde. Trijstūris, kura malu garumi ir 2 dm, 3 dm un $\sqrt{6}$ dm, nav taisnleņķa trijstūris.

9. Doti trijstūra malu garumi. Vai tas ir taisnleņķa trijstūris? Atbildi pamato!

- a) 5 cm, 6 cm un 7 cm b) 3 m, 3 m un $3\sqrt{2}$ m
c) 6 dm, 80 cm un 1 m

10. Romba mala ir 20 cm, bet šaurais leņķis ir 60° . Aprēķini romba diagonāles!

11. Kuģis devās jūrā un nobrauca 40 km ziemeļu virzienā, tad pagriezās uz austrumiem, bet pēc 9 km kuģim radās bojājums un tas noenkurojās. Izsauca glābējus. Tie no ostas uz kuģa atrašanās vietu devās pa taisnāko ceļu. Uzzīmē situāciju un aprēķini glābēju nobraukto attālumu!

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Taisnleņķa trijstūra garāko malu sauc par _____.
- (1 p.) 2. Ja taisnleņķa trijstūra viens šaurais leņķis ir 25° , tad otrs šaurais leņķis ir _____°.
- (1 p.) 3. $\sin 60^\circ =$ _____.
- (2 p.) 4. Taisnleņķa trijstūra katetes ir 12 m un 16 m. Aprēķini hipotenūzas garumu!

- (2 p.) 5. Vienādsānu taisnleņķa trijstūra hipotenūza ir $9\sqrt{2}$ cm. Aprēķini katetes garumu!
- (2 p.) 6. Taisnleņķa trijstūra šaurais leņķis ir 30° , tā pretkatete ir 5 dm. Aprēķini piekateti!
- (2 p.) 7. Vienādsānu trijstūra pamats ir 12 cm, augstums ir 8 cm. Aprēķini sānu malu!
- (3 p.) 8. Aprēķini vienādmalu trijstūra malu, ja tā augstums ir $3\sqrt{3}$ cm!
- (3 p.) 9. Vienādsānu trijstūrī leņķis pie pamata ir α , bet augstums pret pamatu ir h . Aprēķini trijstūra pamatu un sānu malu, ja $\alpha = 30^\circ$ un $h = 7$ cm!
- (3 p.) 10. Mācību literatūrā ir atrodama formula $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, kur a, b, c ir trijstūra malas, bet α ir leņķis starp malām a un b . Ir dots, ka $a = 2, b = 3, \alpha = 60^\circ$. Aprēķini malu c !

23. Trijstūra laukums

Taisnleņķa trijstūra laukums

Taisnleņķa trijstūra laukums ir vienāds ar tā katešu reizinājuma pusi.



CB vai a AC vai b → katetes	S – laukums $S = \frac{CB \cdot AC}{2}$ $S = \frac{a \cdot b}{2}$	$S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6(\text{cm}^2)$
--	---	--

Taisnleņķa trijstūra laukums 20cm^2 , bet tā katete ir 4cm . Aprēķini otras katetes un hipotenūzas garumu!

→ trijstūra laukuma formulā ievieto laukuma un katetes vērtības

$$\rightarrow S = \frac{CB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot b}{2}$$

→ iegūst vienādojumu, kurš jāatrisina $\rightarrow \frac{4 \cdot b}{2} = 20$

$$4 \cdot b = 20 \cdot 2$$

$$4 \cdot b = 40$$

$$b = 40 : 4$$

$$b = 10(\text{cm})$$

→ pēc Pitagora teorēmas nosaka hipotenūzas garumu, izmantojot zināmo katešu vērtības $\rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

$$4^2 + 10^2 = c^2$$

$$c^2 = 116$$

$$c = \sqrt{116} = \sqrt{4 \cdot 29} = 2\sqrt{29}(\text{cm}).$$

Atbilde. Katete ir 10cm , hipotenūza ir $2\sqrt{29}\text{cm}$.

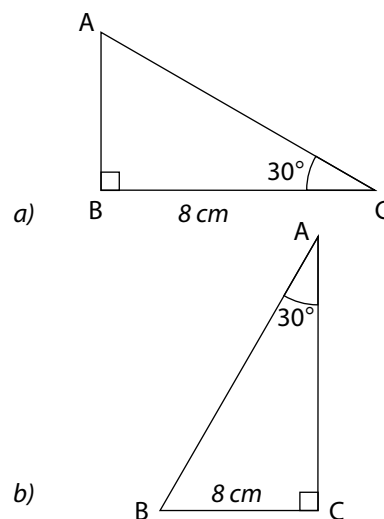
1. Aprēķini taisnleņķa trijstūra laukumu, ja tā viena katete ir 8cm un hipotenūza ir 10cm gara!

2. Taisnleņķa trijstūra katete ir 8cm , bet viens no leņķiem ir 30° . Aprēķini trijstūra laukumu! Apskati abus gadījumus: a) un b)!



Pitagora teorēma

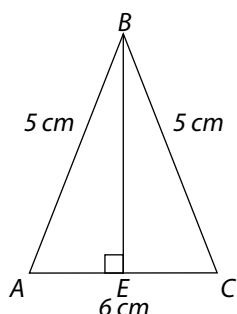
$$a^2 + b^2 = c^2$$





Trijstūra laukums ir vienāds ar pusi no pamata un pret to novilkta augstuma reizinājumu.

CB vai a – pamats AD vai h – augstums	$S = \frac{CB \cdot AD}{2}$ $S = \frac{a \cdot h}{2}$	$S = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 (cm^2)$
CB vai a – pamats BD – pamata pagarinājums AD vai h – augstums	$S = \frac{CB \cdot AD}{2}$ $S = \frac{a \cdot h}{2}$	$S = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 (cm^2)$



☒ Lai aprēķinātu vienādsānu trijstūra laukumu, ja tā sānu mala ir 5 cm, bet pamats ir 6 cm, rīkojas šādi:

➔ vienādsānu trijstūrī ABC novelk augstumu BE, kas ir arī mediāna, t. i., $AE = EC \rightarrow AE = 6 : 2 = 3 (cm)$

➔ taisnleņķa trijstūrī ABE nosaka katetes BE garumu, izmantojot Pitagora teorēmu $AE^2 + BE^2 = AB^2 \rightarrow 3^2 + BE^2 = 5^2$

$$9 + BE^2 = 25$$

$$BE^2 = 25 - 9 = 16$$

$$BE = \sqrt{16} = 4 (cm).$$

➔ aprēķina trijstūra ABC laukumu pēc formulas

$$S(ABE) = \frac{AC \cdot BE}{2} \rightarrow S(ABC) = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 (cm^2)$$

☑ Trijstūra divas malas ir 20 cm un 30 cm. Augstums pret garāko no tām ir 6 cm. Lai aprēķinātu augstumu, kas novilkts pret īsāko no dotajām malām, rīkojas šādi:

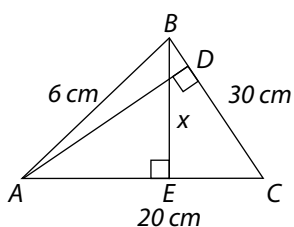
➔ aprēķina trijstūra ABC laukumu pēc formulas $S(ABC) = \frac{BC \cdot AD}{2}$

$$\rightarrow S(ABC) = \frac{30 \cdot 6}{2} = 90 (cm^2).$$

➔ nosaka augstumu BE, kas ir novilkts pret malu AC $\rightarrow$ laukuma formulā ievieto laukuma un pamata vērtības

$$\rightarrow S(ABC) = \frac{AC \cdot BE}{2}$$

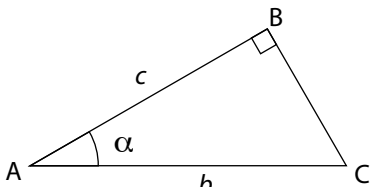
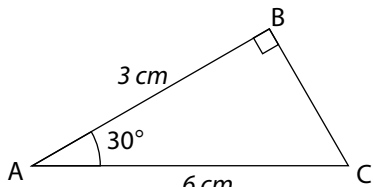
$$90 = \frac{20 \cdot x}{2}; x = BE = 9 (cm).$$



3. Vienādsānu trijstūra pamats ir 80 cm, augstums pret pamatu ir 30 cm. Aprēķini augstumu, kas novilkts pret sānu malu!
4. Trijstūra divu malu garumi ir 15 cm un 20 cm, bet augstums, kas novilkts pret trešo malu, ir 12 cm. Aprēķini trijstūra laukumu!

Trijstūra laukums ir vienāds ar tā divu malu garuma un to veidotā leņķa sinusa reizinājuma pusi.



 AC vai b – mala AB vai c – mala $\angle CAB$ vai α – leņķis starp malām	$S = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin \alpha}{2}$ $S = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$	 $S = \frac{3 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ}{2}$ $S = \frac{18 \cdot 0,5}{2} = 4,5 \text{ (cm}^2\text{)}$
---	---	--

☑ Vienādsānu trijstūra pamats ir 8 cm, leņķis pie pamata ir 30° . Lai aprēķinātu trijstūra laukumu, rīkojas šādi:

➔ vienādsānu trijstūrī ABC novelk augstumu BE, kas ir arī mediāna, t.i., $AE = EC \rightarrow AE = 8 : 2 = 4 \text{ (cm)}$.

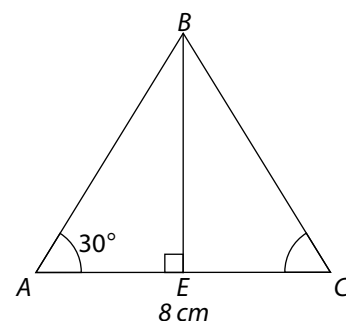
➔ trijstūrī ABE nosaka hipotenūzas AB garumu, izmantojot kosinusa definīciju

$$\cos A = \frac{AE}{AB} \rightarrow \cos 30^\circ = \frac{4}{AB};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{AB} \rightarrow AB = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$

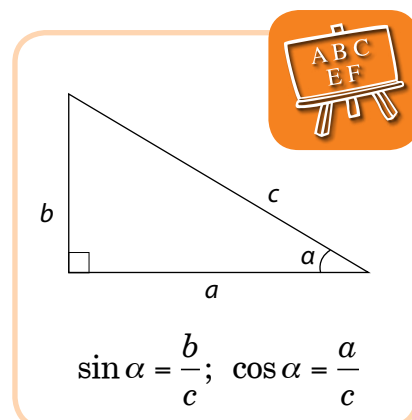
➔ aprēķina trijstūra ABC laukumu pēc formulas

$$S(ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \rightarrow S(ABC) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$



5. Aprēķini vienādmalu trijstūra laukumu, ja tā mala ir 2 cm!

Trijstūra laukumu var aprēķināt, zinot visu tā malu garumus. Ja a , b , c ir trijstūra ABC malu garumi, tad trijstūra perimetrs ir $P(ABC) = a + b + c$. Trijstūra pusperimetrs p ir puse no perimetra. To pieraksta šādi:
 $p = P : 2$





Ja zināmi trijstūra malu garumi a, b, c , tad tā laukumu var aprēķināt, izmantojot Hērona formulu

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

☒ Lai aprēķinātu trijstūra laukumu, kura malas ir 7 cm, 8 cm un 9 cm, rīkojas šādi:

➔ aprēķina trijstūra perimetru $\rightarrow P(ABC) = 7 + 8 + 9 = 24 \text{ (cm)}$

➔ aprēķina trijstūra pusperimetru $\rightarrow p(ABC) = 24 : 2 = 12 \text{ (cm)}$

➔ aprēķina trijstūra ABC laukumu pēc Hērona formulas

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\begin{aligned} S(ABC) &= \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = \\ &= \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{36 \cdot 20} = 6\sqrt{20} = 6\sqrt{4 \cdot 5} = 12\sqrt{5} \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

6. Trijstūrī ABC novilkts augstums BD. Aprēķini trijstūra ABC laukumu un augstumu, kas novilkts pret īsāko malu, ja zināms, ka

a) $AB = 9 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$ un $AC = 17 \text{ cm}$;

b) $AD = 4 \text{ cm}$, $BD = 5 \text{ cm}$ un $\angle C = 45^\circ$;

c) $AB = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$ un $\angle A = 60^\circ$;

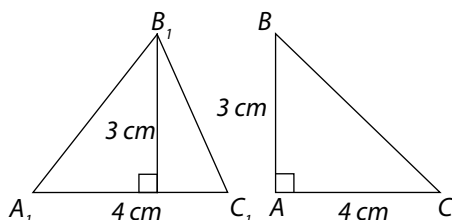
d) $AD = 6 \text{ cm}$, $DC = 15 \text{ cm}$ un sānu malu starpība ir 7 cm.

7. Trijstūra malas attiecas kā 4 : 3 : 3, bet perimetrs ir 20 cm. Aprēķini trijstūra laukumu!

Vienlieli trijstūri



Divi trijstūri ir **vienlieli**, ja to laukumi ir vienādi.
Vienlieli trijstūri ne vienmēr ir vienādi.



☒ Lai noteiktu, vai attēlā dotie trijstūri ir vienlieli, rīkojas šādi:

➔ aprēķina trijstūru laukumu $\rightarrow S(ABC) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ (cm}^2\text{)},$
 $S(A_1B_1C_1) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ (cm}^2\text{)}$

➔ salīdzina abu trijstūru laukumus un izdara secinājumu $\rightarrow S(ABC) = S(A_1B_1C_1)$, tātad trijstūri ir vienlieli.

- ☑ Trijstūra ABC laukums ir 3 cm^2 . Trijstūra mala AC sadalīta trīs vienādos nogriežņos ar punktiem D un E.

Lai aprēķinātu trijstūra ABE laukumu, rīkojas šādi:

- ➔ novelk augstumu BF. Trijstūru ABD, DBE un EBC augstumi sakrīt ar augstumu BF.

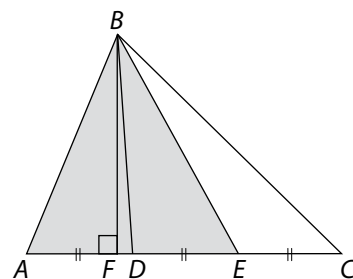
- ➔ uzraksta trijstūru ABD, DBE un EBC laukuma rēķināšanas formulas

$$S(ABD) = \frac{AD \cdot BF}{2} \quad S(DBE) = \frac{DE \cdot BF}{2} \quad S(EBC) = \frac{EC \cdot BF}{2}.$$

- ➔ tā kā $AD = DE = EC$ un augstums visiem trijstūriem ir BF, tad $S(ABD) = S(DBE) = S(EBC)$.

- ➔ $S(ABE) = 3 : 3 \cdot 2 = 2 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Atbilde. $S(ABE) = 2 \text{ (cm}^2\text{)}.$



8. Taisnleņķa trijstūra katetes ir 12cm un 16cm. Aprēķini trijstūra laukumu! Aprēķini trijstūrim vienliela kvadrāta malas garumu!

Pašpārbaude

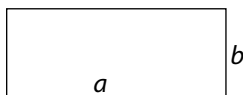
Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Taisnleņķa trijstūra katetes ir 4 cm un 3 cm. Aprēķini tā laukumu!
- (1 p.) 2. Trijstūra malas garums ir 6 cm, bet pret to novilkta augstuma garums ir 5 cm. Aprēķini trijstūra laukumu!
- (1 p.) 3. Trijstūra malas ir 4 cm un 7 cm, bet leņķis starp tām ir 60° . Aprēķini trijstūra laukumu!
- (2 p.) 4. Taisnleņķa trijstūra katete ir 6 cm, bet hipotenūza ir 10 cm. Aprēķini tā laukumu!
- (2 p.) 5. Vienādsānu trijstūra sānu malas garums ir 10 cm, bet pret pamatu novilkta augstuma garums ir 8 cm. Aprēķini trijstūra laukumu!
- (2 p.) 6. Divi trijstūri ir vienlieli. Pirmā trijstūra pamats 10 cm, pret to novilktais augstums 8 cm, bet otrā trijstūra mala ir 5 cm. Nosaki pret to novilkta augstuma garumu!
- (2 p.) 7. Trijstūra malu garumi ir 5 m, 6 m un 9 m. Aprēķini trijstūra laukumu!
- (3 p.) 8. Aprēķini regulāra trijstūra laukumu, ja tā augstums ir 3 cm!
- (3 p.) 9. Vienādsānu taisnleņķa trijstūra laukums ir 8 cm^2 . Kāds ir tā hipotenūzas garums?
- (3 p.) 10. Trijstūra pamatu palielina 2 reizes, bet pret to novilkto augstumu samazina 4 reizes. Kā izmainīsies trijstūra laukums?

24. Četrstūra laukums



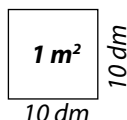
Taisnstūra laukums $S = a \cdot b$



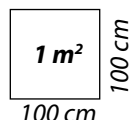
Kvadrāta laukums $S = a^2$



Laukuma mērvienības: $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10000 \text{ cm}^2$



$$\rightarrow 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 100 \text{ dm}^2$$



$$\rightarrow 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 10000 \text{ cm}^2$$

1. Aprēķini kvadrāta malu un laukumu, ja tā perimetrs ir 12 cm! Uzzīmē šo kvadrātu un iekrāso trešo daļu no tā laukuma!

2. Attālumi no taisnstūra diagonāļu krustpunkta līdz tā malām ir 4 cm un 5 cm. Aprēķini taisnstūra laukumu!

☒ Taisnstūra perimetrs ir 40 cm, platums ir 8 cm. Lai aprēķinātu taisnstūra garumu un laukumu, rīkojas šādi:

$\rightarrow$ taisnstūra perimetra formulā $P = 2(a + b)$ ievieto dotos lielumus $\rightarrow 2(a + 8) = 40$

$\rightarrow$ atrisina vienādojumu $\rightarrow a + 8 = 20$

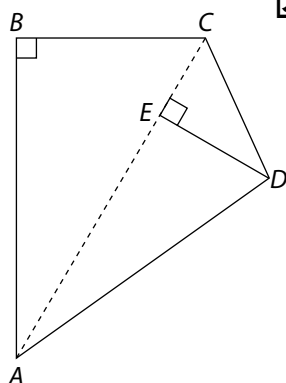
$\rightarrow$ aprēķina taisnstūra garumu $\rightarrow a = 12$

$\rightarrow$ aprēķina taisnstūra laukumu $\rightarrow S = 12 \cdot 8 = 96$

Atbilde. Taisnstūra garums ir 12 cm, laukums ir 96 cm^2 .



Jebkuram četrstūrim **laukumu** var aprēķināt, sadalot četrstūri divos trijstūros, aprēķinot to laukumus un rezultātus saskaitot.



☒ Sadali četrstūri trijstūros! Veic nepieciešamos mērījumus! Aprēķini četrstūra laukumu!

Atrisinājums.

Lai aprēķinātu četrstūra ABCD laukumu, rīkojas šādi:

$\rightarrow$ sadala četrstūri divos trijstūros, $\rightarrow$ novelk diagonāli AC

$\rightarrow$ ABC ir taisnleņķa $\rightarrow S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 1,8}{2} = 2,7 \text{ (cm}^2\text{)}$

$\rightarrow$ ACD novelk augstumu DE

$\rightarrow S = \frac{AC \cdot DE}{2} = \frac{3,4 \cdot 1,1}{2} = 1,87 \text{ (cm}^2\text{)}$

$\rightarrow$ saskaita trijstūru laukumus $\rightarrow S = 2,7 + 1,87 = 4,57 \text{ (cm)}^2$

Atbilde. Četrstūra ABCD laukums ir $4,57 \text{ cm}^2$.

3. Uzzīmē patvaļīgu četrstūri, sadali to trijstūros un aprēķini četrstūra laukumu!

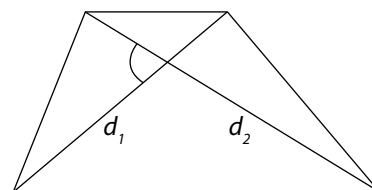
Četrstūrim **laukumu** var aprēķināt pēc formulas $S = 0,5d_1d_2\sin\alpha$, kur d_1 un d_2 ir diagonāļu garums, bet α ir leņķis starp diagonālēm.



☒ Lai aprēķinātu laukumu trapecei, ja diagonāles ir 10 cm un 7 cm, bet leņķis starp tām ir 60° , rīkojas šādi:

→ četrstūra laukuma formulā $S = 0,5d_1d_2\sin\alpha$ ievieto dotos lielumus

$$\rightarrow S = 0,5 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,5\sqrt{3}(\text{cm}^2).$$



4. Aprēķini paralelograma laukumu, ja diagonāles ir 16 cm un 18 cm, bet leņķis starp tām ir 30° !

Perpendikuls, kas novilkts starp četrstūra pretējām malām, ir **augstums**. To apzīmē ar h .



5. Uzzīmē taisnleņķa trapeci RTVZ tā, lai tās īsākā sānu mala RT ir vienāda ar īsāko pamatu TV un ir 3 cm, bet garākais pamats ir 6 cm! No virsotnes V novelc trapeces augstumu un nosaki tā garumu! Nosaki šaurā leņķa Z lielumu!

Četrstūru laukums		
Paralelograms $S = a \cdot h_a$ $S = b \cdot h_b$ $S = ab \sin \alpha$, kur a, b – malas, α – leņķis starp tām	Rombs $S = a \cdot h$ $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ $S = ab \sin \alpha$	Trapece $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, kur a, b – pamati

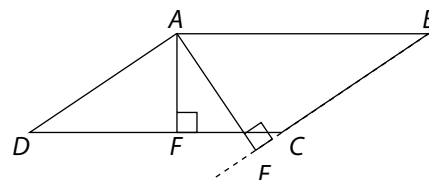
☒ Paralelograma malas ir 6 cm un 12 cm, bet augstums pret garāko malu ir 4 cm.

Lai aprēķinātu augstumu pret īsāko malu, rīkojas šādi:

Dots. Paralelograms ABCD, AD = 6 cm, CD = 12 cm,
 $AF \perp CD$, AF = 4 cm
Jāaprēķina. Augstums AE pret īsāko malu.

→ No punkta A novelk perpendikulu pret malu BC, iepriekš pagarinot to → $AE \perp BC$

→ Aprēķina laukumu → $S = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}^2$

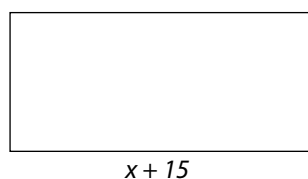


- Uzraksta laukuma formulu $\rightarrow S = BC \cdot AE$
- No laukuma formulas izsaka augstumu $\rightarrow AE = S : BC$
- Aprēķina augstumu $\rightarrow AE = 48 : 6 = 8 \text{ cm}$.

Atbilde. Augstums pret īsāko malu ir 8 cm.

6. Uzzīmē paralelogramu! Veic nepieciešamos mērījumus un aprēķini paralelograma laukumu!
7. Paralelograma laukums ir 26 cm^2 . Aprēķini paralelograma augstumu, ja tā mala ir 13 cm!
8. Romba perimetrs ir 20 cm, bet augstums ir 4 cm. Aprēķini romba laukumu!
9. Romba mala ir 10 cm. Aprēķini romba laukumu, ja tā šaurais leņķis ir 30° !
10. Romba īsākā diagonāle ir 5 dm. Aprēķini romba perimetru un laukumu, ja viens no romba leņķiem ir 120° !
11. Trapeces pamati ir 6 cm un 10 cm, augstums ir 3 cm. Aprēķini trapeces laukumu!
12. Vienādsānu trapeces pamati ir 54 cm un 42 cm, šaurais leņķis ir 45° . Aprēķini trapeces laukumu!
13. Taisnleņķa trapeces īsākais pamats ir 7 cm, bet garākā sānu mala ir 8 cm. Aprēķini trapeces laukumu, ja tās viens leņķis ir 60° .

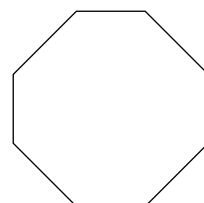
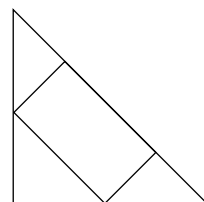
- ☒ Taisnstūra garums ir par 15 dm lielāks nekā platums. Taisnstūra laukums ir vienāds ar kvadrāta laukumu, kura mala ir 10 dm. Lai noskaidrotu, vai taisnstūra un kvadrāta perimetrs ir vienāds, rīkojas šādi:



- apzīmē taisnstūra platumu $\rightarrow x$
- izsaka garumu $\rightarrow x + 15$
- sastāda vienādojumu $\rightarrow x(x + 15) = 10 \cdot 10$
- atrisina vienādojumu $\rightarrow x^2 + 15x - 100 = 0$
- pēc Vjeta teorēmas $\rightarrow x_1 = 5, x_2 = -20$ (šī sakne neatbilst uzdevuma nosacījumiem, jo taisnstūra mala nevar būt negatīva)
- taisnstūra platums ir 5 dm, bet garums ir $5 + 15 = 20 \text{ (dm)}$
- aprēķina taisnstūra perimetru $\rightarrow P = 2 \cdot (5 + 20) = 50 \text{ (dm)}$
- aprēķina kvadrāta perimetru $\rightarrow P = 4 \cdot 10 = 40 \text{ (dm)}$
- salīdzina perimetrus $\rightarrow 50 > 40$

Atbilde. Taisnstūra perimetrs ir lielāks nekā kvadrāta perimetrs.

14. Bērnu rotaļu laukumam ir taisnstūra forma un tā laukums ir 170 m^2 . Viena tā mala ir par 7 m garāka nekā otra. Rotaļu laukumam jāizveido apmale. Veikalā pārdod tikai viena veida apmaļu iepakojumus – pa 20 metriem katrā. Cik iepakojumu jāiegādājas apmales izveidošanai?
15. Vienādsānu taisnleņķa trijstūrī, kura hipotenūza ir 56 cm, ievilkts taisnstūris tā, ka viena mala atrodas uz hipotenūzas, bet pārējās divas tā virsotnes – uz katetēm. Aprēķini taisnstūra laukumu, ja tā malu attiecība ir $2 : 3$! (Uzdevumam ir divi atrisinājumi.)
16. Sadali astoņstūri četrstūros! Veic nepieciešamos mērījumus! Aprēķini četrstūru laukumus! Lai iegūtu astoņstūra laukumu, saskaiti četrstūru laukumus!
17. Saimniecei ir kvadrātveida zemeņu stādījums, kura laukums ir 100 m^2 . Rudenī saimniece vēl iestādīs zemeses taisnstūrveida laukā, kura garums ir par 80% lielāks, bet platums par 20% mazāks nekā sākotnējam laukam. Cik m^2 aizņems zemeņu stādījumi?



Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Kvadrāta mala ir 7 cm. Kvadrāta laukums ir _____ cm^2 .
- (1 p.) 2. Romba diagonāles ir 24 cm un 10 cm. Aprēķini romba laukumu!
- (1 p.) 3. Taisnstūra laukums ir 20 cm^2 . Taisnstūra garums ir a , bet platums ir b . Zinot taisnstūra garumu, platumu var aprēķināt pēc formulas _____.
- (2 p.) 4. Paralelograma diagonāle, kura perpendikulāra sānu malai, ir 6 cm, šaurais leņķis ir 45° . Aprēķini paralelograma laukumu!
- (2 p.) 5. Uzzīmē taisnstūri ar 9 cm un 4 cm garām malām! Iesvītro 75% taisnstūra laukuma!
- (2 p.) 6. Taisnstūra diagonāle ir 15 cm, bet garākā mala ir 12 cm. Aprēķini taisnstūra laukumu!
- (2 p.) 7. Vienādsānu trapeces pamati ir 16 cm un 10 cm, sānu mala ir 5 cm. Aprēķini trapeces laukumu!
- (3 p.) 8. Taisnstūra malu attiecība ir $3 : 4$, bet diagonāle ir 10 cm. Aprēķini taisnstūra laukumu!
- (3 p.) 9. Vienādsānu trapeces pamati ir 52 cm un 34 cm, platais leņķis ir 135° . Aprēķini trapeces laukumu!
- (3 p.) 10. Taisnstūra un kvadrāta laukumi ir vienādi. Taisnstūra viena mala ir par 25 % garāka nekā kvadrāta mala. Par cik % taisnstūra otra mala īsāka nekā kvadrāta mala?

25. Skaitļu virknes jēdziens.

Aritmētiskā un ģeometriskā progresija

- ☒ Jānis noguldīja bankā 1000 latus kā ilgtermiņa depozītu uz 3 gadiem ar procentu likmi 10% gadā. Cik Ls liels uzkrājums būs Jānim trešā gada beigās?

Atrisinājums.

- 1) $1000 + 10\% \text{ no } 1000 = 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 1000 + 100 = 1100 \dots$ tik Ls būs 1. gada beigās.
- 2) $1100 + 10\% \text{ no } 1100 = 1100 + 0,1 \cdot 1100 = 1100 + 110 = 1210 \dots$ tik Ls būs 2. gada beigās.
- 3) $1210 + 10\% \text{ no } 1210 = 1210 + 0,1 \cdot 1210 = 1210 + 121 = 1331 \dots$ tik Ls būs 3. gada beigās.

Līdzīgi izpildot 10 darbības, var noteikt, cik liels uzkrājums būs 10. gada beigās. To pašu rezultātu var iegūt ātrāk, izmantojot ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formulu, kuru apgūsi šajā nodaļā.



Skaitļu virkne ir skaitļu **sakārtojums**, kurā ir **noteikta secība** un visi skaitļi tiek veidoti pēc vienotas likumsakarības. **Skaitļus**, kas veido virkni, sauc par **virknes locekļiem**.

- ☒ Virkne 2; 4; 6; 8; 10; 12; ... ; 200; 202; 204; ... ir naturālo pāra skaitļu virkne. Pirmais loceklis ir 2, otrais loceklis ir 4, trešais – 6 utt., katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējam loceklim pieskaitot 2.

Virknes vispārīgais veids (a_n), kur a_n ir virknes **vispārīgais loceklis**, n locekļu kārtas numurs, $n \in N$

To pieraksta šādi:

$$a_1 = 2; a_2 = 4; a_3 = 6; a_4 = 8; \dots; a_n = 2n$$

$$\text{vai } a_{n+1} = a_n + 2, n \in N$$

Virknes definēšanas veidi

Ar rekurences formulu

Likums, kas parāda, kā noteikt virknes nākamo locekli, zinot iepriekšējo locekli.

☑ $a_{n+1} = a_n + 2$

Ar vispārīgā locekļa formulu

Likums, kas parāda, kā noteikt virknes locekļus, ja zināms to kārtas numurs.

☑ $a_n = 2$

Ar vārdisku skaidrojumu

Virkni apraksta ar vārdisku skaidrojumu

- ☑ Pirmais loceklis ir 2, otrais loceklis ir 4, trešais – 6 utt., katru nākamo virknes locekli iegūst, iepriekšējam pieskaitot 2.

- ☒ Lai aprēķinātu virknes $a_n = 2n$ divdesmito locekli, rīkojas šādi:

→ dotajā formulā n vietā ievieto skaitli 20 → $a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$.

☒ Lai pārbaudītu, vai skaitlis 35 ir virknes $a_n = 2n$ loceklis un kāds ir tā kārtas numurs, rīkojas šādi:

→ atrisina vienādojumu $35 = 2n$, → iegūst $n = 17,5$.

→ secina: → tā kā n ir kārtas numurs, tas nevar būt daļskaitlis, tātad 35 nav dotās virknes loceklis.

☒ Virkne definēta ar rekurences formulu. *No latīņu valodas „recurso” – atgriezties.* Zināms, ka $m_1 = 100$ un $m_{n+1} = m_n : 2$. Uzraksti virknes pirmos četrus locekļus!

Rīkojas šādi:

→ nākamo virknes loekli aprēķina, iepriekšējo dalot ar 2:

→ $m_2 = 100 : 2 = 50$, $m_3 = 50 : 2 = 25$, $m_4 = 25 : 2 = 12,5$.

→ Iegūst virkni 100; 50; 25; 12,5.

☒ Naturālo nepāra skaitļu virkne, kas sākas ar 1, un to iegūst, iepriekšējam loceklim pieskaitot 2. Skaitliski to uzraksta šādi:

→ 1; 3; 5; 7; 9; ...

Virknju īpašības

Atkarībā no virknes **locekļu skaita** virkne ir vai nu **galīga**, vai **bezgalīga**.



☑ Negatīvo viencipara veselo skaitļu virkne $-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$ ir galīga virkne. Tajā ir 9 locekļi.

☑ Naturālo nepāra skaitļu virkne $1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots$ ir bezgalīga virkne.

Atkarībā no virknes locekļu secības tā var būt šāda:

augoša, ja virknes katrs nākamais loceklis ir lielāks nekā iepriekšējais loceklis $a_{n+1} > a_n$ Naturālo nepāra skaitļu virkne $1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots$	dilstoša, ja virknes katrs nākamais loceklis ir mazāks nekā iepriekšējais loceklis $a_{n+1} < a_n$ Virkne $100; 50; 25; \dots$	konstanta, ja virknes visi locekļi ir vienādi $a_{n+1} = a_n$ Virknes $(y_n) = 1^n$ visi locekļi ir vieni- nieki jeb $1; 1; 1; \dots$	svārstīga jeb mainīga, ja virkne nav ne augoša, ne dilstoša, ne kon- stanta. Virknes $x_n = (-1)^n$ jeb $-1; 1; -1; 1; \dots$
--	--	---	--

1. Dota galīga virkne (x_n) . Ieraksti trūkstošos skaitļus un nosaki, vai virkne ir augoša, dilstoša vai svārstīga! Uzraksti virknes definēšanas rekurences formulu!

a) 1; 3; 9; ... ; 81; ...; 729

b) 5; 3; ... ; -1; -3; ...; -7

c) 2; -4; 8; ...; ...; -64; 128

2. Uzraksti virknes (c_n) pirmos četrus locekļus un aprēķini desmito locekli! Vai skaitlis 100 ir virknes loceklis?

a) $c_n = 3n - 2$

b) $c_n = n^3$

c) $c_n = -\frac{3}{5}n$

Aritmētiskā progresija



Aritmētiskā progresija ir virkne, kurā katru nākamo locekli, sākot no otrā, iegūst, iepriekšējam loceklim pieskaitot vienu un to pašu skaitli d , kuru sauc par **diferenci**.

Aritmētiskā progresijas vispārīgā locekļa formula

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d, n \in N, d = a_2 - a_1$$

Pirmo n virknes locekļu summas formula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

No latīņu valodas „progressio” – kustība uz priekšu. No franču valodas „difference” – starpība.

☒ Lai noteiktu, kāda ir dotā virkne 1; 7; 13; 19; 25; ..., rīkojas šādi:

→ no dotās virknes nosaka lielumus a_1 un $d \rightarrow a_1 = 1$,
 $d = a_2 - a_1 = 7 - 1 = 6$.

→ virknes *rekurentā* formula $a_{n+1} = a_n + 6$ un virknes *vispārīgā* formula $a_n = 1 + (n-1) \cdot 6$ jeb $a_n = 6n - 5$ (to iegūst, atverot iekavas un vienkāršojot izteiksmi).

→ secina $\rightarrow$ dotā virkne ir bezgalīga, augoša aritmētiskā progresija.

☒ Aritmētiskās progresijas vispārīgais loceklis $a_n = 6n - 5$, tās divdesmitais loceklis $a_{20} = 6 \cdot 20 - 5 = 115$ un pirmo 20 locekļu summa ir

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(1 + 115) \cdot 20}{2} = 1160.$$

☒ Dota virkne 100; 80; 60; 40; 20; 0. Lai noteiktu virknes diferenci, aritmētiskās progresijas vispārīgā locekļa formulu, rekurento formulu un aprēķinātu virknes pirmo 6 locekļu summu, rīkojas šādi:

→ no dotās virknes nosaka tās zināmos elementus

$$\rightarrow a_1 = 100, a_6 = 0, d = 80 - 100 = -20$$

→ uzraksta virknes locekļu aprēķināšanas rekurento formulu

$$\rightarrow a_{n+1} = a_n - 20$$

→ uzraksta virknes locekļu aprēķināšanas vispārīgo formulu, izmantojot dotos lielumus

$$\rightarrow a_n = 100 + (n - 1) \cdot (-20) = 100 - 20n + 20 = 120 - 20n$$

→ aprēķina virknes locekļu summu

$$\rightarrow S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} = \frac{(100 + 0) \cdot 6}{2} = 300$$

Tā ir galīga dilstoša aritmētiskā progresija.

3. Dota virkne 1; 8; 15; 22... Nosaki virknes diferenci, aritmētiskās progresijas vispārīgā locekļa formulu, rekurento formulu un aprēķini virknes pirmo 10 locekļu summu!

4. Dota aritmētiskā progresija, $a_1 = 1,5$ un $d = 0,5$.

Uzraksti pirmos piecus virknes locekļus! Aprēķini a_{10} un S_{10} !

5. Aprēķini aritmētiskās progresijas (a_n) pirmo n locekļu summu S_n , ja

$$\text{a) } a_1 = 3, a_{30} = 90 \qquad \text{b) } a_1 = 20, a_{10} = -25$$

$$\text{c) } a_1 = -10, d = -0,5, n = 21$$

6. Uzraksti mazāko (a_1) un lielāko (a_n) divciparu skaitli! Nosaki, cik ir divciparu skaitļu! Saskati aritmētisko progresiju un aprēķini visu divciparu skaitļu summu S_n !

7. Starp skaitļiem -8 un 6 ievieto četrus tādus skaitļus, lai tie kopā ar dotajiem skaitļiem veidotu aritmētisko progresiju! Aprēķini iegūtās galīgās virknes visu locekļu summu!

8. Aprēķini aritmētiskās progresijas diferenci un astoto locekli, ja $a_1 = 2$ un $S_8 = 44$! Uzraksti virknes pirmos četrus locekļus un virknes vispārīgā locekļa formulu!

9. Draugi Annai dzimšanas dienā uzdāvināja Ls 10. Lai nopirktu enciklopēdiju, kuras cena ir Ls13.67, Anna nolēma no vecāku iedotās kabatas naudas katru dienu ietaupīt 30 santīmus.

a) Uzraksti formulu, pēc kuras var aprēķināt Annas sakrāto naudas summu S_n (latos)!

- b) Aprēķini, cik Ls Anna būs sakrājusi 10 dienās!
 c) Cik dienās Anna būs sakrājusi nepieciešamo summu?
 d) Kādu virkni iegūtu, ja uzrakstītu naudas summu, kas katru dienu ir Annas iekrājumā?

10. Sportistam pēc traumas ārsts ieteica pakāpenisku treniņu programmu: pirmajā dienā vingrot tikai 10 min, bet katru nākamo dienu vingrošanai paredzēto laiku palielināt par 5 min, līdz sasniegs 1 h. Kurā dienā no vingrošanas sākuma sportists vingros 1 stundu dienā?

Uzraksti virkni! Izmantojot a_1, d, a_n kā zināmos lielumus, aprēķini n !

Ģeometriskā progresija



Ģeometriskā progresija ir virkne, kurā katru nākamo locekli, sākot no otrā, iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar vienu un to pašu skaitli q , kuru sauc par **kvocientu**. $q \neq 0$

Ģeometriskās progresijas vispārīgā locekļa formula

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, n \in N, q = \frac{b_2}{b_1}$$

Pirmo n virknes locekļu **summas** formula

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$$

No franču valodas „quotient” – cikreiz, dalīšanas rezultāts.

- ☒ Ja $b_1 = 3, q = 2$, tad iegūst virkni 3; 6; 12; 24; 48; ...; b_n ; ...;
 $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Šī virkne ir bezgalīga augoša ģeometriskā progresija,

$$b_7 = 3 \cdot 2^{7-1} = 3 \cdot 2^6 = 3 \cdot 64 = 192, b_{10} = 3 \cdot 2^9 = 1536,$$

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{1536 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = \frac{3073 - 3}{1} = 3069$$

11. Noskaidro, kura no virknēm ir aritmētiskā, kura – ģeometriskā progresija! Uzraksti n -tā locekļa formulu! Nosaki, kura virkne ir augoša, kura – dilstoša!

- a) 0,3; 1,3; 2,3; 3,3; ... b) 100; 50; 25; 12,5; ...

- c) $\frac{10}{3}; \frac{20}{9}; \frac{30}{27}; \frac{40}{81}; \dots$

12. Dotajai ģeometriskajai progresijai (b_n) nosaki q, b_5, S_5 !

- a) 1; 2; 4; ... b) -1; 3; -9; ... c) 1000; 100; 10; ...

13. Aprēķini ģeometriskās progresijas (b_n) nezināmos lielumus!

	b_1	q	n	b_n	S_n
1)	2	3	4		
2)	-5	10		-50000	
3)		0,5	5	0,125	

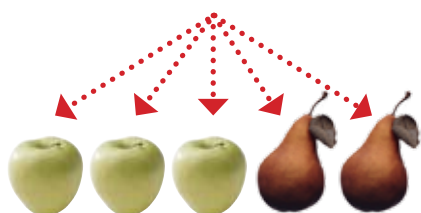
Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Vai skaitļu virkne -8; -4; -2; -1; ... ir augoša vai dilstoša?
- (1 p.) 2. Vai virkne, kuru veido visi trīsciparu skaitļi, ir bezgalīga?
- (1 p.) 3. Vai skaitlis 5 ir virknes $c_n = 1 + 4n$ pirmais loceklis?
- (2 p.) 4. Aprēķini virknes 7; 17; 27; 37; 47; ... desmito locekli!
- (2 p.) 5. Nosaki, vai virkne 15; 10; 5; 0; -5; ... ir aritmētiskā progresija! Ja ir, tad aprēķini tās diferenci!
- (2 p.) 6. Aprēķini aritmētiskās progresijas pirmo 17 locekļu summu, ja $a_1 = 4$; $a_{17} = -44$!
- (2 p.) 7. Nosaki, vai virkne 3; 15; 75; 375; ... ir ģeometriskā progresija! Ja ir, tad aprēķini q !
- (3 p.) 8. Aprēķini pirmos trīs virknes $x_n = 5n - 3$ locekļus! Vai virkne ir augoša vai dilstoša?
- (3 p.) 9. Aprēķini ģeometriskās progresijas pirmo 4 locekļu summu, ja $b_1 = 4$; $q = 0,2$!
- (3 p.) 10. Kārkliņa kungs dzīvokļa remontam paņēma bankā 2500 eiro lielu kredītu ar nosacījumu, ka pirmajā mēnesī viņam jāatmaksā 250 eiro, bet katru nākamo mēnesi – par 10 eiro mazāk nekā iepriekšējā mēnesī. Cik eiro Kārkliņa kungam būs jāmaksā sestajā mēnesī? Vai 2 gadu laikā kredīts tiks atmaksāts?

26. Kombinatorika, statistika un varbūtība

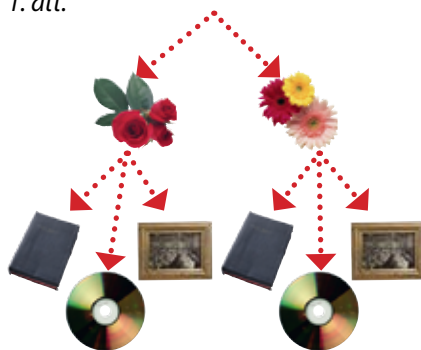
Kombinatorika



1. att.

- ✓ Vienā traukā ir 2 bumbieri, otrā ir 3 āboli. Cik dažādos veidos var izvēlēties vienu augli?

Aplūko 1. attēlu! Izvēlēties vienu augli var $2 + 3 = 5$ dažādos veidos.



2. att.

- ✓ Jānis grib apsveikt Annu. Viņš Annu apsveiks ar puķi (rozi vai neļķi) un dāvanu (grāmatu vai disku, vai gleznu). Cik dažādos veidos ir iespējams veidot apsveikumu? Vēro 2. attēlu! Jānis apsveikumu var izvēlēties $2 \cdot 3 = 6$ veidos.

1. Izpēti skolas ēdnīcas ēdienkarti!

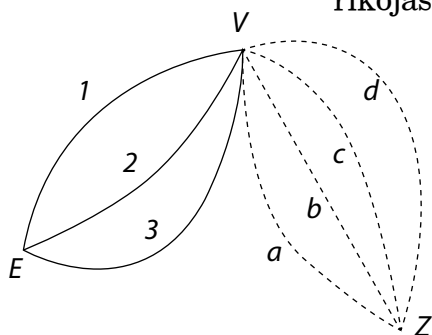
Zupas	Otrais ēdiens	Deserts
1. Zirņu zupa	1. Kotletes	1. Maizes zupa
2. Borščs	2. Zivs	2. Krēms
3. Soļanka		

Direktors grib izvēlēties pirmo, otro un trešo ēdienu. Attēlo zīmējumā visas iespējas, kādas ir direktoram ēdienu izvēlē!



Ja vienu izvēli var veikt a veidos, otru b veidos, trešo – c veidos..., tad visas izvēles ir iespējams veikt $a \cdot b \cdot c \dots$ veidos. Tas ir reizināšanas likums.

- ☒ No ciemata „E” uz ciematu „V” ved 3 asfaltēti ceļi. No ciemata „V” uz ciematu „Z” ved 4 zemes ceļi (*skat. att.*). Cik dažādus maršrutu veidus var izvēlēties, lai nokļūtu no „E” uz „Z”? Lai to noskaidrotu, rīkojas šādi:



- ➔ no ciemata „E” uz „V” var braukt pa 3 dažādiem maršrutiem: 1 vai 2, vai 3
- ➔ no ciemata „V” uz „Z” var braukt pa 4 dažādiem maršrutiem: a vai b , vai c , vai d
- ➔ Pēc reizināšanas likuma, lai nokļūtu no ciemata „E” uz „Z”, ir iespējami $3 \cdot 4 = 12$ maršrutu izvēles veidi.



Visu kopas elementu pārkārtošana citādā secībā ir **permutācija**.

- ✓ Burtu a , b un c sakārtojumu var pārkārtot sešos dažādos veidos:

a, b, c	a, c, b	b, c, a	b, a, c	c, a, b	c, b, a
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Tātad no trim burtiem var iegūt sešas atšķirīgas permutācijas.



☒ Permutāciju skaitu var noteikt ar reizināšanas likumu.

Ir doti cipari 1, 2, 4, 7. Lai noteiktu, cik dažādus četrciparu skaitļus var sastādīt no šiem cipariem, ja cipari nedrīkst atkāroties, rīkojas šādi:

- ➔ nosaka, cik veidos var izvēlēties pirmo ciparu, $\rightarrow 4$ veidos
- ➔ nosaka, cik veidos var izvēlēties otro ciparu, $\rightarrow 4 - 1 = 3$ veidos, jo viens cipars jau ir izvēlēts
- ➔ nosaka, cik veidos var izvēlēties trešo ciparu, $\rightarrow 4 - 2 = 2$ veidos, jo divi cipari jau ir izvēlēti
- ➔ nosaka, cik veidos var izvēlēties ceturto ciparu, $\rightarrow 4 - 3 = 1$ veidā, jo trīs cipari jau ir izvēlēti
- ➔ pēc reizināšanas likuma ir $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ dažādi četrciparu skaitļi.

2. Pie ārsta rindā uz pieņemšanu gaida pieci pacienti. Cik dažādi pacientu rindas secības veidi ir iespējami?

Ja apskata dažus kopas elementus, nevis visu kopu uzreiz, tad no kopas elementiem veido **izlases**. Pieņemam, ka elementi izlasēs neatkārtojas.

Kopa	Izlase
Alfabēts	Vārds „saule”, ...
Ciparu kopa {2; 0; 4; 1}	Skaitlis 201, 204, 40...
9. c klase	Skolēni Viktors un Marija

Ir divu veidu izlases:

Variācijas ir izlases, kas atšķiras ar elementu secību. Svarīga ir elementu secība .	☒ Doti četri elementi 	Kombinācijas ir izlases, kas atšķiras vismaz ar vienu elementu. Nav svarīga elementu secība .
Variācijas un ir dažādas, jo atšķiras ar elementu secību.	Kombinācijas un ir vienādas, jo sastāv no vieniem un tiem pašiem elementiem	
Variāciju skaits pa diviem elementiem no četriem dotajiem ir 12 (<i>skat. att.</i>). 	Kombināciju skaits pa diviem elementiem no četriem dotajiem ir 6 (<i>skat. att.</i>). 	

Variāciju skaitu var noteikt ar reizināšanas likumu.

- ☒ No burtiem a , b un c pa 2 elementiem var izveidot šādas 6 variācijas:

1) a, b 2) $b; a$ 3) c, b 4) b, c 5) a, c 6) c, a

- ☒ Lai noteiktu, cik variācijas veidojas no 3 burtiem pa diviem elementiem, rīkojas šādi:

- ➔ nosaka, cik veidos var mainīt pirmo burtu, ➔ 3 veidos
- ➔ nosaka, cik veidos var mainīt otro burtu, ➔ $3 - 1 = 2$ veidos, jo viens burts jau atrodas pirmajā vietā
- ➔ Pēc reizināšanas likuma $3 \cdot 2 = 6$ veidos var izveidot variācijas no trim dotajiem burtiem, t. i., 6 izlasēs pa diviem elementiem.

3. Ir doti cipari 4, 5, 1, 6. Cik divciparu skaitļu var veidot no šiem cipariem, ja cipari nedrīkst atkārtoties?

4. No klases kolektīva jāizvēlas 5 skolēni trim dažādiem amatiem. Cik dažādos amatos var ievēlēt katru no 5 skolēniem?

5. No pieciem izlases sportistiem diviem jāpiedalās sacensībās. Noskaidro, cik dažādus sacensību dalībnieku pārus var izveidot!

Statistika

Statistika ir zinātnes nozare, kas vāc, apstrādā, analizē datus par dažādiem procesiem dabā, ekonomikā, zinātnē un sabiedrībā un izdara secinājumus par pētāmo jautājumu.

Lai izprastu biežāk izmantotos datu kopu raksturojošos statistikas elementus – **aritmētisko vidējo**, **mediānu** un **modu** – aplūkosim divus piemērus.

☒ Marija matemātikā saņēma šādas atzīmes: 5; 6; 7; 5; 5; 6; 8.	☒ Viktors matemātikā saņēma šādas atzīmes: 6; 5; 4; 7; 8; 2; 6; 8; 7; 7.
---	---

Šīs atzīmes ir skaitļi, kas veido **datus**.

Skaitļu summa, kas dalīta ar skaitļu (atzīmju) skaitu, ir **vidējā vērtība** vai **datu vidējais aritmētiskais**. To apzīmē ar $\bar{x}$ un aprēķina šādi:

$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 5 + 5 + 6 + 8}{7} = 6$	$\bar{x} = \frac{6 + 5 + 4 + 7 + 8 + 2 + 6 + 8 + 7 + 7}{10} = 6$
---	--

Vidējais aritmētiskais **6** norāda Marijas un Viktora vidējo atzīmi matemātikā.

Datu kārtošana augošā secībā ir **datu ranžēšana**.



Marijas atzīmes ranžētas (sakārtotas augošā secībā) šādi: 5; 5; 5; 6; 6; 7; 8.

Viktora atzīmes ranžētas (sakārtotas augošā secībā) šādi: 2; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 8.

Skaitlis, kas atrodas datu virknes vidū, ir **mediāna**. To apzīmē **Me**.



Mediānu nosaka šādi: 5; 5; 5; **6**; 6; 7; 8
 $Me = 6$

Mediānu nosaka šādi: 2; 4; 5; 6; **6; 7**; 7; 7; 8; 8
 $Me = \frac{6 + 7}{2} = 6,5$

Datus analizējot, norāda, cik bieži atkārtojas katra vērtība. Datu **biežumu** apkopo tabulā.

Marijas un Viktora atzīmes, kuras sakārtotas tabulā pēc to atkārtošanās biežuma, izskatās šādi:

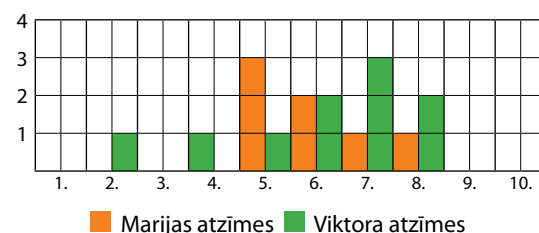
Atzīme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marijas atzīmju atkārtošanās skaits	0	0	0	0	3	2	1	1	0	0
Viktora atzīmju atkārtošanās skaits	0	1	0	1	1	2	3	2	0	0

Visbiežāk iegūtais vērtējums Marijai ir 5 balles (3 reizes), bet Viktoram 7 balles (3 reizes).

Šo statistikas lielumu sauc par **modu**.

Ja datus attēlo stabiņu diagrammā, tad moda tajā ir augstākais stabiņš.

Marijas un Viktora atzīmju atkārtošanās biežums



Moda ir datu virknē visbiežāk sastopamais skaitlis.



6. Deju kolektīvā ir 10 dalībnieki, kuriem ir 18, 21, 20, 25, 19, 17, 20, 24, 16, 20 gadi. Veic datu ranžēšanu!

Nosaki

- dejošu vidējo vecumu;
- datu modu;
- datu mediānu!

7. Izraksti savas šī semestra atzīmes matemātikā! Aprēķini semestra vidējo atzīmi, modu un mediānu! Attēlo datus stabiņu diagrammā!

Varbūtība

Bieži dažādās zinātnes nozarēs veic eksperimentus un **mēģinājumus**. Tiem ir iespējams **iznākums** vai vairāki iznākumi, kas veido **iznākumu kopu**.

Mēģinājums	Iznākums	Iznākumu kopa
Met spēļu kauliņu vienu reizi	Uzmesti 1 vai 2, vai 3, vai 4, vai 5, vai 6 punkti	{1; 2; 3; 4; 5; 6}
Met monētu vienu reizi	Uzkritis cipars vai ģerbonis	{c; ģ}
Velk lodīti no kastes, kurā ir 2 sarkanas (s1 un s2) un 3 zilas (z1, z2 un z3) lodītes	Ir izvilka lodīte s1 vai s2, vai z1, vai z2, vai z3.	{s1; s2; z1; z2; z3}



Neiespējams notikums nekad neiestājas.

- ☒ Vienā reizē, metot spēļu kauliņu, uzvest 10 punktus nav iespējams. Tas ir neiespējams notikums.



Drošs jeb **nenovēršams notikums** noteikti iestājas katrā mēģinājumā.

- ☒ Ja šodien ir pirmdiena, tad rīt noteikti būs otrdiena. Tas ir drošs notikums.



Gadījuma notikuma **varbūtība** ir skaitlis, kas rāda, cik liela ir iespēja, lai kāds notikums iestātos.

Notikuma varbūtību rēķina pēc formulas:

$$\text{Notikuma varbūtība} = \frac{\text{labvēlīgie notikuma iznākumi}}{\text{visi iespējamie notikuma iznākumi}}$$

Notikumus apzīmē ar lielajiem latīņu alfabēta burtiem, bet varbūtību – ar burtu **P**. Notikuma A varbūtību apzīmē $P(A)$.

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ kur } m - \text{labvēlīgo notikuma iznākumu skaits,}$$

n – visu iespējamo notikuma iznākumu skaits

- ☒ Lai noteiktu varbūtību notikumam A (*vienu reizi metot spēļu kauliņu, uzvests cipars 1*) un notikumam B (*vienu reizi metot spēļu kauliņu, uzvests pāra cipars*), rīkojas šādi:

→ nosaka notikuma A labvēlīgos iznākumus un to skaitu m ,

→ labvēlīgs notikums ir uzvests cipars 1 $\rightarrow m = 1$

→ nosaka visu notikuma A iespējamo notikumu skaitu $n \rightarrow n = 6$

- aprēķina notikuma A varbūtību, $\rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$
- nosaka notikuma B labvēlīgos iznākumus un to skaitu m ,
- labvēlīgi notikumi ir *uzmests cipars 2* vai *uzmests cipars 4*, vai *uzmests cipars 6*, $\rightarrow m = 3$
- visu iespējamo notikuma B notikumu skaits ir 6, $\rightarrow n = 6$
- aprēķina notikuma B varbūtību, $\rightarrow P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
8. Nosaki varbūtību notikumam C – vienu reizi metot spēļu kauliņu, ir *uzmests cipars, kas dalās ar 3!*
9. Kastē ir 9 bumbiņas, no kurām 2 ir baltas, 3 sarkanas un 4 zilas. Uz labu laimi tiek izvilktā viena bumbiņa. Aprēķini varbūtību notikumiem:
- a) D – izvilktā bumbiņa ir balta b) E – izvilktā bumbiņa ir zila
- c) F – izvilktā bumbiņa ir zila vai sarkana
- d) G – izvilktā bumbiņa nav zaļa e) H – izvilktā bumbiņa nav balta

Pašpārbaude

Risini uzdevumus! Iekavās norādīts punktu skaits par katru pareizi atrisinātu uzdevumu.

- (1 p.) 1. Vienā vāzē ir 3 rozes, otrā – 4 neļķes. Cik dažādos veidos var izvēlēties vienu puķi?
- (2 p.) 2. Jānim ir trīs dažādi džemperi un divas bikses. Cik dažādos veidos viņš var izvēlēties sev džemperi un bikses?
- (2 p.) 3. Cik veidos var pārkārtot vārda *mūks* burtus?
- (2 p.) 4. Cik dažādus trīsciparu skaitļus var salikt no cipariem 9, 8, 2, ja cipari tajos neatkārtojas?
- (3 p.) 5. Cik dažādus trīsciparu skaitļus var salikt no cipariem 7, 1, 4, ja cipari tajos drīkst atkārtoties?
- (3 p.) 6. No burtiem *a, f, i, k* sastādi visas iespējamās variācijas pa trim elementiem!
- (3 p.) 7. No cipariem 8, 1, 0 sastādi visas iespējamās kombinācijas pa diviem elementiem!
- (4 p.) 8. Kāda ir varbūtība notikumam I – „Metot spēļu kauliņu, uzņemto punktu skaits ir nepāra skaitlis”, K – „Uzņemto punktu skaits nepārsniedz 4”, L – „Ir uzņemts desmitnieks”?

Atbildes

1. Darbības ar racionāliem skaitļiem

1. a) jā; b) nē; c) nē; d) jā. 2. a) 0,1(6); b) -0,(36); c) 0,2(0); d) 0,375(0);
e) 0,(230769); f) -1,075(0); g) -2, (4). 3. a) jā; b) nē; c) nē; d) nē; e) jā. 4.
a) visi skaitļi; b) 0; -5; 26; $-\frac{24}{4}$; 1240; 211; $\frac{28}{4}$ c) -5; 211; $\frac{28}{4}$ d) 0; 26;
 $-\frac{24}{4}$; 1240 e) 26; 1240; 211; $\frac{28}{4}$. 5. a) 17; b) 700; c) -0,02; d) 45.

6.

$10\frac{1}{2}$	-1650	$5\frac{2}{3}$	$-4\frac{3}{5}$	$\frac{11}{12}$
-100	$2\frac{1}{25}$	2	$-3\frac{3}{5}$	-0,25
1,28	-2	-32	1,92	23
$-\frac{11}{100}$	1,2	-4	-16,5	51

7. a) 0; b) $\frac{7}{360}$; c) 0,19; d) 1. 8. a) $1\frac{1}{3}$; b) 24,5; c) $4\frac{4}{5}$; d) 35; e) -8;
f) 350; g) 200; h) $4\frac{1}{5}$; i) $\frac{4}{7}$; j) $3\frac{1}{6}$. 9. a) ± 2 ; b) $\emptyset$; c) -1. d) $x = 6$ vai $x = -2$

Pašpārbaude 1. nē; 2. 1; 3. savstarpēji pretējie skaitļi; 4. 1;
5. nē, pareizā atbilde ir 4; 6. nē, pareizā atbilde ir $\frac{5}{13}$; 7. jā; 8. 0,(12);
9. $x = \pm 4$; 10. 1.

2. Pirmskaitļi un salikti skaitļi. Skaitļu dalāmība

1. 1, 2 ; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 3, 4, 6, 12; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; 1, 3, 7, 9, 21, 63; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72
2. 2, 4, 6; 3, 6, 9; 5, 10, 15; 10, 20, 30; 12, 24, 36; 24, 48, 72 3. a) 0, 2, 4, 6, 8 b) 1, 4, 7 c) 0, 5 d) 0, 9 e) 225, 525, 825 4. a) 520, 502, 250; b) 205, 250, 520 5. a) $16 = 2^4$ b) $24 = 2^3 \cdot 3$ c) $80 = 2^4 \cdot 5$ d) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; e) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; f) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. 6. a) 1; b) 2; c) 9; d) 20; e) 6. 7. a) 28; b) 36; c) 30; d) 42; e) 90.

3. Daļas un procenti. proporcijas

1. Pietiks naudas, lai visi nopirktu to, ko vēlas.

Preces nosaukums	Cena Ls	Atlaide %	Atlaide Ls	Izpārdošanas cena, Ls
Viriešu kurpes	30	50%	15	15
Zēnu džinsa bikses	10	45%	4,5	5,5
Sieviešu zābaki	40	$\frac{1}{2}$	20	20
Izpārdošanas cena visām precēm kopā Ls				43,5

2. a) $\frac{450}{1800} = \frac{1}{4}$; b) $\frac{13}{2600} = \frac{1}{200}$; c) $\frac{375}{500} = \frac{3}{4}$; d) $\frac{70}{280} = \frac{1}{4}$; e) $\frac{20}{180} = \frac{1}{9}$

f) $\frac{75}{300} = \frac{1}{4}$. 4. a) 1,4; b) 4; c) 20; d) 88; e) 32,58; f) 40. 5. a) 24; b) 112;

c) 7,34; d) 25. 6. Nē, jo $56 + 25 = 81$, bet $80 < 81$. 7. 2048 MB = 2GB.

8. 65%. 9. 150 Ls.

10.

a)	Preču skaits	Cena, Ls
	5	15,75
	1	3,15
	3	9,45

b)	Masa, kg	Cena, Ls
	3	4,2
	1	1,4
	7	9,8

c)	Laiks, min	Izlasīto lpp. skaits
	15	6
	5	2
	35	14

11. Plānoja tulkot 15 dienas. Darbu pabeidza 20 dienās. Iztulkoja 120 lpp.

Paspārbaude. 1. 4. 2. 12. 3. 5 min. 4. 60 sant. 5. 10 koki. 6. $\frac{2}{3}$
7. 700 detaļas. 8. 32%. 9. 5h. 10. 9 dienām.

4. Pakāpes, to īpašības. Pakāpes ar negatīvu kāpinātāju

1. a) $5^2 = 25$; b) a^3 ; c) $3^2 = -\left(-1\frac{1}{3}\right)^2 = 7\frac{2}{9}$;
d) $(b + 3)^2$; e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{64}{225}$; f) $2 \cdot (-3)^2 = 18$.

2.

$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$4^1 = 4$	$5^1 = 5$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$

a – bāze	b – kāpinātājs	c – pakāpe
2	3	8
8	2	64
5	2	25
-1	jebkurš nepāra skaitlis	-1
1	100	1
0,3	3	0,027

-80 (g) 100 (s) -70 (u) 76 (i) 12 (ķ) -40 (d) 7 (ī) -32 (r)

3. -80, -70, -40, -32, 7, 12, 76, 100; gudrītis

4. a) 64; b) 81; c) 36; d) $\frac{3}{8}$; e) 32; f) 96; g) 1; h) 16; i) 12. 5. a) x^6 ;

b) x^5 ; c) x^3 ; d) x^3 ; e) x^8 ; f) x^4 ; g) x^8 ; h) x ; i) x^2 ; j) x^4 ; k) x^{10} ; l) x^9 .

6. a) $\frac{3}{16}$; b) $1\frac{4}{25}$; c) $\frac{2}{9}$; d) $\frac{5}{7}$; e) $\frac{5}{16}$; f) $\frac{1}{6}$; g) 4; h) $\frac{2}{19}$.

7. a) $>$ b) $=$ c) $>$ d) $>$ e) $>$ f) $<$ g) $=$ h) $=$ i) $<$ j) $<$

8. 1) 1; 2) 81; 3) $\frac{1}{32}$; 4) 20; 5) 4; 6) 32; 7) 64; 8) $2\frac{1}{4}$; 9) 64; 10) 9; 11) 72; 12) -1; 13) 64; 14) $\frac{1}{243}$; 15) 16; 16) 13.

Pašpārbaude. 1. x^4 . 2. $(-1)^{10} > (-1)^{11}$. 3. a^7 . 4. $2^2 + z^2$. 5. 1.

6. $(0,2)^{-3} < (0,2)^{-4}$. 7. 64. 8. $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 2$. 9. $\frac{1}{64}$. 10. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7} = 3^7$.

5. Izteiksmes ar mainīgajiem. Monomi. Polinomi. Saīsinātās reizināšanas formulas

1. a) $10 + (10 + 3) + 2 \cdot 10 = 43$; b) $x + (x + 3) + 2x = 4x + 3$.

2. 1) $k + c$; 2) $3(a - b)$; 3) $x^2 - y^2$; 4) $(v + r)^2$; 5) $t^3 + m^3$.

3. TEVIZDEVĀS. 4. a) 1; b) -9; c) -4,4; d) $-5\frac{2}{5}$. 5. c. 6. a) 4,6; b) 4,36; c) 4.

7. a) $x \in R$; b) $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; d) $x \in R$. 8. a) $2a$; b) $-2b - 1$; c) $6x + 18$; d) $13m - 9n$; e) 2; f) $7a^2 - a - 2$. 9. a) $3x$; b) $4v - 20$; c) $500 - 46b - 8k$. 10. a) $a + 1$; b) $4x^2 + 3y - 1$;

c) $14mn - 14$. 11. a) $12a^5b$; b) $-3,9x^6y^4$; c) $0,25a^2c^{12}$; d) $1000b^{15}x^9$; e) $-2x^6$; f) $0,1a^3$. 12. a) 0; b) $4a$; c) $-15x^2y^4$; d) $5a + 5ab^3$. 13. a) $-7z - 8$;

b) $2m^2 + 5mn - 3n^2$; c) $8a$; d) $2kv - 2k$. 14. a) 3; b) $10a$; c) $14m$; d) y .

15. a) y^2 ; b) $2a^2 + 50$; c) $8n - 16$; d) $-x^2 - 12xy - 9y^2$; e) $8a^2 - 12a$; f) 0.

16. 5. 17. a) $2k(3n + 2)$; b) $x(x - 2)$; c) $(2a - 6)(2a + 6)$; d) $y(y^2 + 3y - 3)$;

e) $(a + b)(5 - x)$; f) $(3x + 2)(3x + 2)$; g) $(c - d)(1 + y)$; h) $(m - n)(k + 9)$;

i) $(9 - 4m)(9 - 4m)$.

17. Secinājumi: 1) Ja pie divu skaitļu summas pieskaita šo skaitļu starpību un rezultātu dala ar 2, tad iegūst pirmo skaitli. 2) Ja no divu skaitļu summas atņem šo skaitļu starpību un rezultātu dala ar 2, tad iegūst otro skaitli.

Pašpārbaude. 1. $2a$. 2. -5. 3. $(c + d)^2$. 4. 5. 5. $5x^2 - 7x + 3$.

6. $2a^2 + 2ab - 4b^2$. 7. $m^2 - 14mn + 49n^2$. 8. $100 - 6x - 19y$. 9. D.

10. Attālums būs vienāds ar divkārtotu ātrumu stāvošā ūdenī.

6. Lineārs vienādojums. Lineāro vienādojumu sistēma

1. a) 4; b) 4; c) -11; d) $\emptyset$; e) $x \in R$; f) 0; g) $1\frac{2}{3}$; h) $\emptyset$; i) $x \in R$.

2. a) $6x - 3 = 2x$; $x = \frac{3}{4}$; b) $(x + 4) \cdot 4 - 4 = 4$; $x = -2$; c) $2(x - 9) = x$; $x =$

18; d) $7x - 1 = 8$; $x = 1\frac{2}{7}$. 3. 7 ķirši, 14 bumbieres, 21 ābele. 4. 16 gadi,

38 gadi, 64 gadi. 5. 9; 32. 6. $\begin{cases} x + y = 41 \\ 4x = y + 4 \end{cases}$ $x = 9$ un $y = 32$. 7. $\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$x = 13$ un $y = 17$. 8. 4 km/h; 19 km/h. 9. c. 10. a) viens; b) neviena; c) bez-

galīgi daudz; d) viens.

11. a) $\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = 3\frac{4}{13} \\ y = 2\frac{6}{13} \end{cases}$.

12. Pēdējā atbilde (10 un 4) ir nepareiza; Nosacījums, piemēram, kopā ir 14 augļi. 13. 310 un 186. 14. 9 divdesmit santīmu monētas un 12 desmit santīmu monētas. 15. 6 cilvēki. 16. 3h, 60 km un 180 km.

Pašpārbaude. 1. Jā. 2. Bezgalīgi daudz. 3. Lineāru. 4. $x = 5$.

5. $x + 2x = 18$. 6. 15 un 10. 7. Viens. 8. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. 9. 72 km/h un 82 km/h.

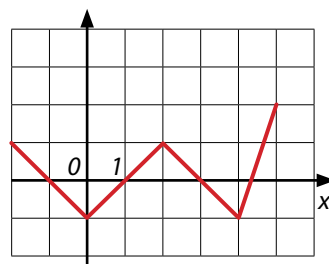
10. $\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases}$.

7. Koordinātu plakne. Funkcija un ar to saistītie jēdzieni

1.

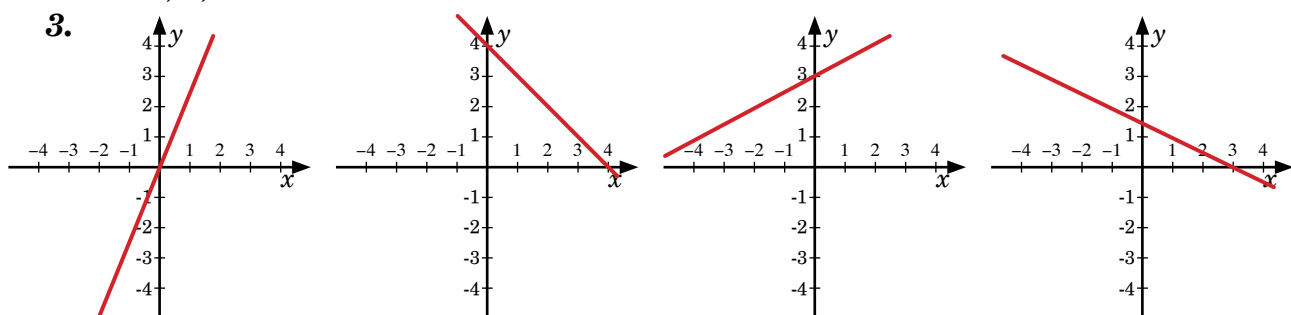
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	1	0	-1	0	1	0	-1	2

Punkts V pieder, Z nepieder, T nepieder lauztās līnijas grafikam.

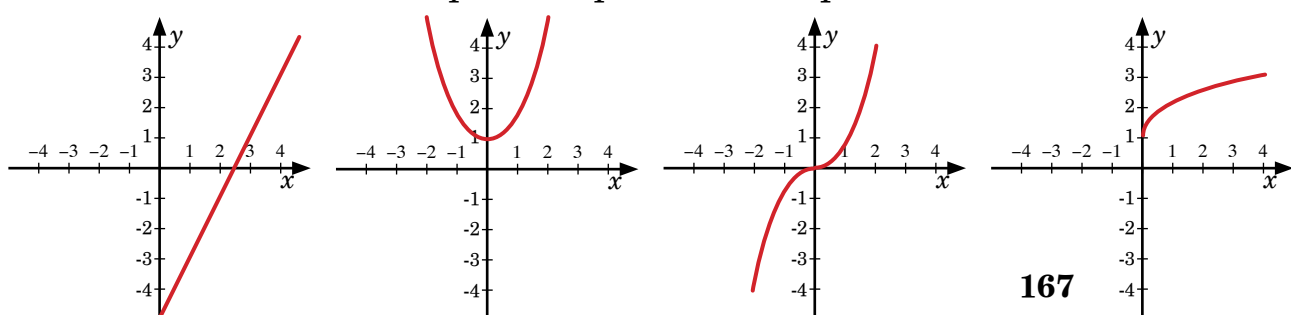


2. 36km; 7,5h

3.



4. a) A(2; -1); b) C(-4; $-\frac{1}{4}$); c) B($4\frac{1}{4}$; 8); d) D(12; $\frac{1}{4}$)



5.

x	1	-1	0	-2	$\frac{2}{3}$	-1,5
y	2	-2	0	-4	$1\frac{1}{3}$	-3

6. $y = 2x$

7. 1. taisnes, perpendikulāras 2. abscisu asi, vertikālo 3. kvadrantos
4. koordinātām 5. Oy 6. Neatkarīgo mainīgo, abscisu 7. y , ordinātu
8. Funkcijas definīcijas apgabalu 9. minimums

8. a) $D(f) = [-3; 4]$, $E(f) = [-2; 3]$, funkcija aug, ja $x \in [-3; 4]$, funkcijas sakne $x = 0$, $y_{\max} = 3$, $y_{\min} = -3$ b) $D(f) = (-3; 5]$, $E(f) = [-3; 6)$, funkcija dilst, ja $x \in (-3; 1) \cup (4; 5]$, funkcija konstanta, ja $x \in [1; 4]$, funkcijas sakne $x = 0$, $y_{\min} = -3$. c) $D(f) = [-2; +\infty)$, $E(f) = [0; +\infty]$, funkcija aug, ja $x \in [-2; +\infty)$, funkcijas sakne $x = -2$, $y_{\min} = 0$

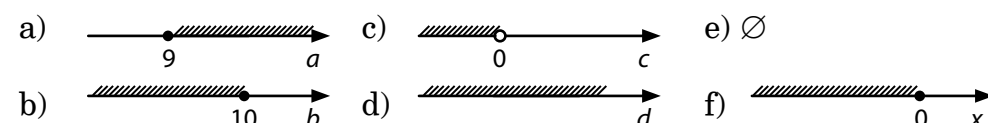
Pašpārbaude. 1. II kvadrantā **2.** Taisnstūris, $P = 14$ (vien.)

3. $y = 1, 2x + 0,65$, $x = 3, y = 4,25$; $x = 5, y = 6,65$; $x = 10, y = 12,65$ **4.** $y = -1$
5. $x = -1,5$. **6.** $D(f) = [-3; 3]$; $E(f) = [-3; 3]$; $x_1 = -2,5$, $x_2 = 2,5$; funkcija aug, ja $x \in (-2; 0) \cup (1; 3)$; $y < 0$, ja $x \in (-2,5; 2,5)$; $y_{\max} = 3$

8. Lineārā nevienādība. Lineāro nevienādību sistēma

1. a) Patiesa; b) aplama; c) patiesa; d) aplama; e) aplama. **2.** 1) b; 2) a; 3) e; 4) d; 5) f; 6) c. **3.** a) $v \leq 50$; b) $s = 40$; c) $g > 12$; d) $m \geq 10$; e) $p \leq 8$; f) $h < 20$. **4.** a) $37 > 4$; b) $21 > -12$; c) $-60 < 6$; d) $6 > -0,6$. **5.** a) $x = 0$; b) $x > 0$; c) $x > 0$; d) $x < 0$.

6.



7. a; c; e. **8.** a) $(5; +\infty)$; b) $(-\infty; -6]$; c) $(-\infty; +\infty)$; d) $(-\infty; 4]$; e) $\emptyset$; f) $(-5; +\infty)$; g) $(1000; +\infty)$.

9. Vairāk nekā 150 kg. **10.** $v \geq 16$ km/h. **11.** a) $(2; 3)$; b) $[-1; 2]$; c) $(-1,2; -0,2)$; d) $[-5,s; -4,2]$.

12. a) $[-4; 3]$; b) $\left[2\frac{9}{14}; +\infty\right]$; c) $[-23; -2)$.

Pašpārbaude. 1. Aplama **2.** Jā. **3.** $x \leq 1$. **4.** $[-7; +\infty)$. **5.** Lasis.

6. $\left[-\infty; \frac{3}{7}\right]$. **7.** $[-6; 2]$. **8.** $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

9. Ne vairāk kā 15min. **10.** Nē.

9. Tiešā proporcionalitāte, lineāra funkcija

1. a) skaits, maksa; b) sakarību; c) tiešās proporcionalitātes; d) neatkarīgo, atkarīgo; e) taisne. 2. b; d.

3. $k = -4, y = -4x$

4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2

x	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	0	-4	-8	-12

5. a) $(0;1), \left(-\frac{1}{3};0\right)$; b) $(0;-4), (8;0)$; c) $(0;2), \left(\frac{2}{3};0\right)$; d) $(0;-1), \left(-\frac{1}{3};0\right)$.

Paralēlas taisnes ir funkciju $y = -3x + 2$ un $y = -3x - 1$ grafiki.

Pašpārbaude. 1. Maksa. 2. x. 3. Lineāra. 4. 11. 5. 5. 6. $\left(\frac{1}{3};0\right)$.
7. Piem., $y = 4x, y = 4x + 1$. 8. $y = 1,4x$; 4,2kg; 5l.
9. Paralēlas taisnes. 10. Visas taisne krusto Oy asi punktā $(0;3)$.

10. Ievads ģeometrijā.

Leņķis, tā veidi, bisektrise. Attālums

1. a) 1. un 4.att.; b) 2., 3. un 5.att. 2. Patiess – a, c un d; aplams – b.
3. a) 7.att.; b) 9.att.; c) 8.att. 4. $B \in a, C \in a, D \notin a, E \notin a$. Taisne BC. 4 stari.
5. 0, 1, 2 vai 3 krustpunkti. 6. a) BR, RP un BP; b) 45 mm.
7. a) AC = 20 cm, BC = 10 cm; b) AC = 12 cm, BC = 18 cm;
c) AC = 11 cm, BC = 19 cm. 8. a) Jā; b) nē. 9. a) šaurs leņķis; b) plats leņķis; c) taisns leņķis; d) atvērts leņķis, uzzīmē 50° leņķi, bet apzīmēšanas loku ievēl leņķa ārpusē. 10. a) 60° ; b) 42° . 11. 60° .

Pašpārbaude. 1. Stars. 2. Leņķis. 3. 180° . 4. a) $A \in m$; b) $B \notin m$.
5. 63 cm. 6. 34° . 7. VT = 18 cm, TZ = 24 cm.
8. a) patiess; b) aplams; c) aplams. 9. 0, 1, 2 vai 3 krustpunkti. 10. A, Ā, E, Ē, H, K, Ķ, M, N, Ņ, V, Z, Ž.

11. Ar taisņu savstarpējo novietojumu saistītie leņķi

1. $45^\circ, 135^\circ$ 2. $110^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 70^\circ$ 3. $140^\circ, 40^\circ, 140^\circ, 40^\circ$ 4. $68^\circ, 68^\circ, 112^\circ, 112^\circ, 68^\circ, 68^\circ, 112^\circ, 112^\circ$

12. Trijstūru veidi. Trijstūra elementi.

Trijstūra vienādības pazīmes

1. 11 trijstūri 2. a) $\angle EGF$ b) $\angle EFG, \angle EGF$ c) EG 3. a) nē b) jā
4. a) taisnleņķa b) vienādsānu platleņķa c) vienādmalu d) vienādsānu taisnleņķa e) vienādsānu platleņķa f) vienādmalu 6. P = 19 (cm)
7. DE = KL = 3 cm; BC = LM = 4 cm; AC = DF = 5 cm.
9. a) $\triangle ABC = \triangle DEF$ (mmm) b) $\triangle ABC = \triangle DEF$ (lml) c) $\triangle ABC = \triangle DEF$ (mlm) d) $\triangle ABC = \triangle DEF$ (mlm) 10. a) $\triangle ABC = \triangle DEC$ (mlm)
b) $\triangle ABD = \triangle CBD$ (mlm) c) $\triangle PRS = \triangle TUS$ (lml)

Pašpārbaude. 1. $\angle DCE$. **2.** 8 cm. **3.** Jā. **4.** $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. **5.** 7 cm.
6. BC; AC. **7.** $45^\circ, 90^\circ$, vienādsānu taisnleņķa trijstūris. **8.** a) 140° ;
b) $\angle CED = 40^\circ, \angle D = 60^\circ$. **9.** 120° . **10.** BD – kopēja mala (mmm).

13. Kvadrātsakne, tās īpašības

- 1.** a) ± 4 ; b) 0; c) $\pm \frac{3}{5}$; d) $\pm 1,1$; e) ± 3 ; f) $\emptyset$. **2.** a) $x \geq -1$;
b) $x \geq 3$; c) $x \leq 2$; d) $x \geq -5$; e) $x \geq -2$; f) $x \in (-\infty; +\infty)$.
3. $\sqrt{37}, \sqrt{0,9}$. **4.** a) $1\frac{1}{4}$; b) 0,6; c) 3; d) 1,6; e) 20; f) -28; g) 8; h) $\frac{5}{36}$;
i) 48; j) $\frac{1}{10}$; k) $\frac{1}{2}$; l) 1; m) $\frac{2}{3}$; n) 10; o) -2; p) 9; r) 9; s) $3+2\sqrt{2}$; t) $7-4\sqrt{3}$;
u) $8-2\sqrt{15}$. **5.** Karotīns.

6.

	$a \cdot b$	$a : b$	$a + b$	$a - b$	a^2	b^2
$a = \sqrt{7}, b = 2$	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{7} : 2$	$\sqrt{7} + 2$	$\sqrt{7} - 2$	7	4
$a = b = 4\sqrt{3}$	48	1	$8\sqrt{3}$	0	48	48
$a = 3\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$	6	3	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	18	2
$a = 4\sqrt{5}, b = 2\sqrt{5}$	40	2	$6\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	80	20
$a = \sqrt{7}, b = 2\sqrt{7}$	14	0,5	$3\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$	7	28

7. $P_{\text{Kvadrātam}} = 8\sqrt{3}, P_{\text{Taisnstūrim}} = 4 + 2\sqrt{3}$ un $8\sqrt{3} > 4 + 2\sqrt{3}$;

$S_{\text{Kvadrātam}} = 12, P_{\text{Taisnstūrim}} = 2\sqrt{3}$ un $12 > 2\sqrt{3}$.

8.

$\sqrt{15}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{24}$	$\sqrt{120}$
$\otimes$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$\otimes$	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{30}$

- 9.** a) $2\sqrt{6}$; b) $3\sqrt{15}$; c) $-\sqrt{6}$; d) 0; e) $-7\sqrt{2}$; f) 15; g) 21;
h) $3\sqrt{6} - 6 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$; i) 11; j) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; k) $\sqrt{\frac{3}{4}}$; l) 1,5.
10. a) nē; b) jā; c) jā; d) jā; e) jā; f) jā; g) nē; h) jā; i) jā.
11. $\sqrt{5}, 3, 2\sqrt{3}, 4, 3\sqrt{2}, \sqrt{20}, 5, 2\sqrt{7}, \sqrt{33}, 6$.
12. Addition – saskaitīšana

13. a) $4\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $2\sqrt{10}$; d) $\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$; e) $\frac{2\sqrt{x+2}}{x+2}$; f) $\frac{x\sqrt{2-x}}{2-x}$;
g) $-\frac{1+\sqrt{7}}{3}$; h) $2(\sqrt{7}+\sqrt{5})$; i) $3(\sqrt{2}-\sqrt{3})$; j) $\frac{\sqrt{5}-5}{5}$; k) $\sqrt{3}-2$;
l) $\frac{1-2\sqrt{x+x}}{1-x}$.

Pašpārbaude. 1. $\frac{4}{5}$. **2.** 20. **3.** 5. **4.** nē. **5.** 4 un 5. **6.** 10. **7.** jā. **8.** 3.
9. $6\sqrt{a}-4\sqrt{b}$. **10.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

14. Algebriskās daļas, darbības ar tām

1. a) $\frac{3}{x}$; b) $\frac{b+5}{a}$; c) $\frac{1}{x+3}$; d) $\frac{2(a+1)}{a-1}$; e) n .
2. a) $-\frac{4a}{x-9} = \frac{-4a}{x-9} = \frac{4a}{-x+9} = -\frac{-4a}{-x+9}$;
b) $\frac{x+y}{-7m} = \frac{-x-y}{7m} = -\frac{x+y}{7m} = -\frac{-x-y}{-7m}$;
c) $-\frac{1-x}{x+1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-x}{-x-1} = -\frac{x-1}{-x-1}$;
d) $\frac{-a-b}{c+d} = -\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+b}{-c-d} = -\frac{-a-b}{-c-d}$.
3. a) $\frac{3y^2}{4x}$; b) $\frac{x+y}{c-d}$; c) 15; d) $\frac{m+n}{2}$.
4. a) $\frac{b}{2a}$; b) $\frac{a+b}{m-n}$; c) $\frac{x-y}{3(c+d)}$; d) $\frac{4y^2(x+y)}{x^2}$.
5. $\frac{3(a-4)}{a^2}$; $\frac{1}{6}$.
6. a) $\frac{2a^2}{a^2-4}$; b) $\frac{bm+an}{m^2-n^2}$; c) $\frac{x}{5x-1}$; d) 0; e) $\frac{-4cd}{c^2-d^2}$; f) $\frac{2}{b-3}$.
7. a) $\frac{12x}{(x-3)^2}$; b) $\frac{1}{b}$; c) 1; d) $\frac{2}{a-4}$.

Pašpārbaude. 1. $\frac{1}{x-5}$. **2.** -7. **3.** $\frac{x}{-2x+3} = -\frac{-x}{-2x+3}$. **4.** $\frac{2}{x+1}$.
5. $\frac{3}{x}$. **6.** $d-1$. **7.** 6. **8.** $5+b$. **9.** $x-y$. **10.** 1.

15. Apgrieztā proporcionālitate. Ievads nelineāro sistēmu risināšanā

1. a) +; b) +; d) +. **2.** b. **3.** a) 1) $y = 1; -1; 0,5; -0,5$;
2) $x = 1; -1; 0,5; -0,5$; 3) $x \in (-\infty; 0)$; 4) $y \in (0; +\infty)$. b) 1) $y = -1; 1; -0,5; 0,5$;
2) $x = -1; 1; -0,5; 0,5$; 3) $x \in (0; +\infty)$; 4) $y \in (-\infty; 0)$. c) 1) $y = -6; 6; -3; 3$; 2)
 $x = -6; 6; -3; 3$; 3) $x \in (0; +\infty)$; 4) $y \in (-\infty; 0)$. d) 1) $y = 4; -4; 2; -2$;
2) $x = 4; -4; 2; -2$; 3) $x \in (-\infty; 0)$; 4) $y \in (0; +\infty)$.

x	-2	-1	0,5	1	2	3	4
y	-6	-12	24	12	6	4	3

4. $k = x \cdot y$; $k = 12$; $y = \frac{12}{x}$

5. a) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$.

6. a) 1; b) 1; c) 0; d) 0. 7. A un C pieder, B nepieder. 8. $k = -20$.

9. $y = \frac{2}{x}$; $y = 2x - 3$. 10. a) 8 braucieni katrai mašīnai; b) 4 mašīnas.

Pašpārbaude. 1. Apgrieztā proporcionalitāte. 2. y . 3. Hiperbola.

4. 0,5. 5. $k = -40$. 6. $(1; 4)$; $(-1; -4)$. 7. $a = \frac{20}{b}$.

8. 2 atrisinājumi. 9. $(2; -3)$, $(-1,5; 4)$. 10. 1080 km.

16. Daudzstūris. Četrstūri, to īpašības

1. a) piecstūris, 540° ; b) sešstūris, 6; c) 7; 900° ; d) astoņstūris, 1080° ; e) deviņstūris, 9. 3. a) 124° ; 56° ; 124° ;

b) 105° ; 75° ; 105° ; c) 36° ; 144° ; 36° ; 144° ; d) 72° ; 108° ; 72° ; 108° .

4. $P = 26$ cm. 5. 5 cm; 10 cm. 6. a) 3. pazīme;

b) 1. pazīme. 7. a un b. 9. $\angle A = 50^\circ$; $\angle B = \angle D = 130^\circ$; $\angle O = 90^\circ$; $\angle BAO = 25^\circ$; $\angle ABO = 65^\circ$.

10. a) perpendikulāras; b) vienādas; c) leņķus; d) vienādas.

11. 1) malas; 2) pretējie; 3) pielenķu; 4) diagonāles;

5) trijstūros. 12. a) 90° ; b) 5 cm; c) 15 cm; d) 12 cm; e) 50 cm.

13. Mala ir 3 cm, laukums ir 9 cm^2 .

Pašpārbaude. 1. Vienāda. 2. 180° . 3. Perpendikulāras.

4. A – paralelograms, B – rombs. 5. OV. 6. 1800° .

7. $\angle A = \angle C = 64^\circ$; $\angle B = \angle D = 116^\circ$. 10. 16 cm, 10 cm, 18 joslas.

17. Trapece

1. 1 – taisnstūris, 2 – paralelograms, 3 – trapece, 4 – rombs, 5 – kvadrāts. 2. $\angle M = \angle L = 70^\circ$, $\angle N = \angle K = 110^\circ$.

3. $ML = 2,8$ cm; $NK = 1,7$ cm; $MN = LK = 1,6$ cm; $P = 7,7$ cm.

4. 135° ; 110° . 5. 6 cm; 12 cm. 6. 5 cm. 7. 10 cm. 8. b, d – patiesi.

9. 60° ; 120° ; 7 cm. 10. $\angle A = 75^\circ$; $\angle B = 105^\circ$; $\angle C = 120^\circ$; $\angle D = 60^\circ$.

11. 120° ; 60° ; 6 cm; 6 cm; 6 cm; 12 cm.

Pašpārbaude. 1. B. 2. 360° . 3. Vienādsānu. 4. 126° ; 99° . 5. 22 cm.

6. 90° ; 90° ; 140° . 7. 15 cm; 6 cm; 9 cm. 8. 12 cm. 9. 66 cm. 10. 120° ; 60° ; 4 cm; 4 cm; 4 cm; 8 cm.

18. Kvadrātvienādojums. Vjeta teorēma

1. a) nē b) jā c) nē d) jā e) jā f) nē g) jā h) nē i) jā j) nē

2.

Kvadrātvienādojums	Kvadrātlocekļa koeficients a	Lineārā locekļa koeficients b	Brīvais loceklis c	Pilnais vai nepilnais
a) $15x^2 - 8x + 1 = 0$	15	-8	1	pilnais
b) $3x^2 - x - 2 = 0$	3	-1	-2	pilnais
c) $-6x^2 + 7x - 2 = 0$	-6	7	-2	pilnais
d) $-4x^2 = 0$	-4	0	0	nepilns
e) $3x^2 - 6x = 0$	3	-6	0	nepilns
f) $-x^2 + 72 = 0$	-1	0	72	nepilns

3.

Kvadrātvienādojums $ax^2 + bx + c = 0$	Diskriminants $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$	Vienādojuma saknes x_1 un x_2
a) $15x^2 - 8x + 1 = 0$	$D = (-8)^2 - 4 \cdot 15 \cdot 1 = 4$	$x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{1}{5}$
b) $3x^2 - x - 2 = 0$	25	$x_1 = 1; x_2 = -\frac{2}{3}$
c) $-6x^2 + 7x - 2 = 0$	1	$x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = -\frac{1}{2}$
d) $x \cdot (5 - x) = 14 \cdot (x + 1)$	25	$x_1 = -2; x_2 = -7$
e) $(2x + 3)^2 - (x - 2)^2 = -8$	100	$x_1 = -4\frac{1}{3}; x_2 = -1$

4. a) $x_1 = 5; x_2 = -5$ b) $y = 0$ c) $\emptyset$ d) $y_1 = 0; y_2 = -\frac{3}{10}$

e) $k_1 = 10; k_2 = -10$ f) $x_1 = 2; x_2 = -2$ g) $y_1 = 0; y_2 = 6$

h) $x_1 = 0; x_2 = -1$ i) $\emptyset$ j) $x_1 = 0; x_2 = 2$

5. a) $x_1 = 1; x_2 = -5$

b) $x_1 = 7; x_2 = -1$ c) $x_1 = 5; x_2 = 3$

6.

Vienādojums	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 + x_2$	x_1	x_2
$x^2 - x - 6 = 0$	-6	1	-2	3
$x^2 + x - 6 = 0$	-6	-1	-3	2
$x^2 + 5x - 6 = 0$	-6	-5	1	-6
$x^2 - 6x + 8 = 0$	8	6	2	4
$x(x - 1) = 2 - 2x$	-2	-1	1	-2
$(x + 3)^2 + 2(x - 9) = 0$	-9	-8	1	-9

7.

x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	Vienādojums
1	2	3	2	$x^2 - 3x + 2 = 0$
-3	4	1	-12	$x^2 - 1x - 12 = 0$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$x^2 - \frac{1}{4} = 0$
-2	-2	-4	4	$x^2 + 4x + 4 = 0$

8. a) $b = 1; x = -2$; b) $b = 4; x = 3$; c) $c = -3; x = -3$.

9. a) 13; b) 5; c) 169; d) $2\frac{3}{5}$; e) 8. 10. a) $x_1 = -4, x_2 = 3$

b) $x_1 = -3, x_2 = -1$ c) $x_1 = 1\frac{2}{3}, x_2 = -1$. 11. 12, 13 12. 2 cm un 7 cm

Paspārbaude. 1. jā 2. $a = 1; b = -6; c = 5$ 3. $3x^2 - x = 0$

4. $x^2 + 4x - 5 = 0$ 5. 2 6. $x = 0$ 7. $x_1 = 0; x_2 = 1$.

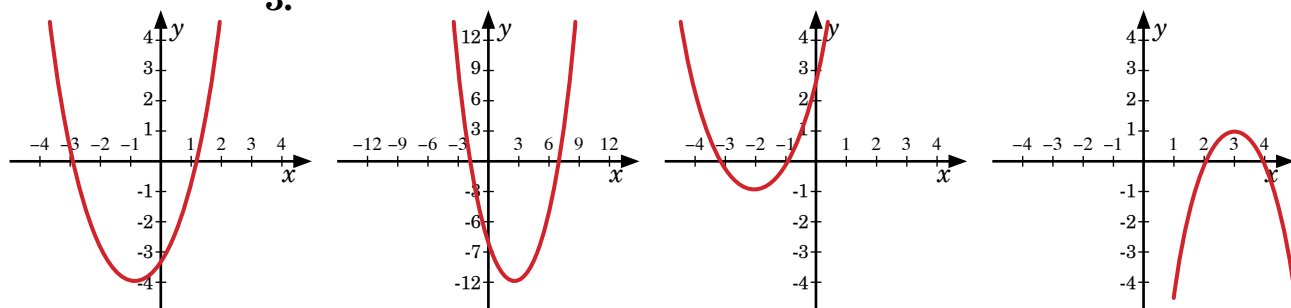
8. $x_1 = -2; x_2 = \frac{1}{4}$. 9. $x_1 + x_2 = 6$ un $x_1 \cdot x_2 = -16$. 10. $x^2 - 4 = 0$.

19. Kvadrātfunkcija. Grafiku pārveidojumi

1. a) A pieder grafikam; b) B nepieder grafikam; c) C pieder grafikam; d) D nepieder grafikam.

2. kvadrātfunkciju; parabola; $3x^2 + 6x = 0$; -1; uz augšu; $3 > 0$.

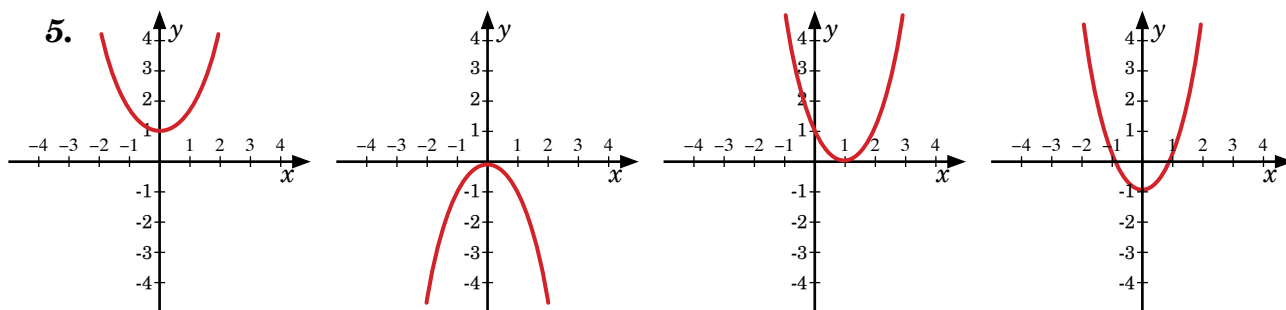
3.



a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ b) $f(x) = x^2 - 3x - 10$ c) $f(x) = x^2 + 4x + 3$ d) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

4.

Grafika skice				
$f(x) = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 8$	$x_1 = -7; x_2 = 4$	$x = -5$	-
$f(x) > 0$	$x \in (-\infty; 6) \cup (8; +\infty)$	$x \in (-7; 4)$	$x \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$	-
$f(x) < 0$	$x \in (6; 8)$	$x \in (-\infty; -7) \cup (4; +\infty)$	-	$x \in (-\infty; +\infty)$



a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = -x^2$

c) $f(x) = (x-1)^2$

d) $f(x) = x^2 - 1$

Pašpārbaude. 1. uz leju 2. $b = -3$ 3. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ 4. $x_1 = 0; x_2 = 6$

5. vienības parabola pārnesta pa y asi 6 vienības uz augšu. 6. vienības parabola pārnesta pa x asi 8 vienības pa labi. 7. a) 1; b) $x_1 = 0$ vai $x_2 = 4$; c) $E(f) = [1; +\infty)$; d) nav; e) $x \in (2; +\infty)$ f) $x \in (-\infty; +\infty)$.

20. Kvadrātnevienādība. Intervālu metode

1. Nē. 2. 1) a) $x \in (-\infty; -3) \cup (6; +\infty)$; b) $x \in [-3; 6]$; 2) a) $\emptyset$ b) ja $x \in (-\infty; +\infty)$; 3) a) $x \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$; b) $x \in (2; 8]$; 4) a) $x \in (-\infty; +\infty)$; b) $\emptyset$; 5) a) $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$; 6) a) $x \in (4; 7)$; b) $x \in (4; 7]$; 7) a) $x \in (-3; 7)$; b) $x \in [-3; 7]$; 8) a) $x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; +\infty)$.

3. a) $x \in (-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$; b) $x \in (-4; 4)$; c) $x \in [0; \frac{1}{2}]$; d) $x \in [-6; 0]$;

e) $x \in (-\infty; -4) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$; f) $x \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (3; +\infty)$;

g) $x \in (-\infty; -2,5) \cup (2; +\infty)$;

h) $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}] \cup [2; +\infty)$. 4. a) $x \in (-\infty; -9) \cup (6; +\infty)$;

b) $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 5]$; c) $x \in (-\infty; -5] \cup [-1; 1] \cup [5; +\infty)$;

d) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; e) $x \in [-2; -1) \cup (3; +\infty)$; f) $x \in (-6; 1) \cup (2; 4)$; g) $x \in (-\infty; 0) \cup (5; 10]$;

h) $x \in (-\infty; -8) \cup (-3; 0) \cup (3; +\infty)$; i) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Pašpārbaude. 1. jā. 2. $x \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$. 3. $x \in (-6; 6)$.

4. $x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. 5. $x \in [-\frac{1}{2}; 5]$.

6. $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 7. $x \in (-2; 1)$. 8. $x \in [-1; 0)$. 9. $x \in (-4; 1)$, $x = 0$.

10. $x \in (-\infty; -0,4) \cup (0; +\infty)$, $x = 1$.

21. Riņķa līnija un riņķis, to elementi. Centra leņķis un ievilkts leņķis

1. Riņķa iekšpusē. 2. Rādiuss un pieskare ir savstarpēji perpendikulāri. 3. COD ir vienādmalu trijstūris.
4. $d = 7\text{ cm}$. 5. Vienu pieskari. 6. $\triangle AOB = \triangle AOD$ (mlm). 7. $P = 24\text{ cm}$.
8. $\angle CKD = 30^\circ$. 9. 60° un 120°
10. Aprēķinos izmanto $\pi = 3,1$.

Rādiuss r	Diametrs d	Riņķa līnijas garums $C = 2\pi r$	Riņķa līnijas laukums $S = \pi r^2$
2 cm	4 cm	12,4 cm	12,4 cm ²
3 cm	6 cm	18,6 cm	27,9 cm ²
5 cm	10 cm	31 cm	77,5 cm ²
4 cm	8 cm	24,8 cm	49,6 cm ²

11. Tā kā riņķa līnijas rādiuss ir 5 cm, tad tās diametrs ir 10 cm
 $\rightarrow AC = 5 \cdot 2 = 10$ (cm)

- 1) Trijstūrī ABC centra leņķis AOC ir izstiepts leņķis, tātad $\angle AOC = 180^\circ$.
- 2) Centra leņķim AOC atbilst ievilkts leņķis ABC. Ievilkts leņķis ir 2 reizes mazāks nekā tam atbilstošais centra leņķis, tātad $\angle ABC = \angle AOC : 2 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$
- 3) Ja $\angle ABC = 90^\circ$, secinām, ka $\triangle ABC$ ir taisnleņķa trijstūris.
- 4) Taisnleņķa trijstūrī ABC mala AB ir katete, bet riņķa līnijas diametrs ir hipotenūza.

Šim trijstūrim varam izmantot Pitagora teorēmu:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$6^2 + BC^2 = 10^2$$

$$36 + BC^2 = 100$$

$$BC = \sqrt{64}$$

$$BC = 8 \text{ (cm)}$$

12. $P : C \approx 1,3$, jo $P = 40 \text{ cm}$, $C = 31,4 \text{ cm}$.

Pašpārbaude. 1. *R.l.* (O; OG); rādiuss OG; diametrs BH; horda AC; pieskare EF 2. 3 vai 4 daļās 3. a) $2\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $2\sqrt{2} \pi$; c) 2π

4. a) rādiuss palielinājās 2 reizes b) C palielinājās 2 reizes c) S palielinājās 4 reizes.

5. $AB = 4 \text{ cm}$.

6. $d = 5 \text{ cm}$.

22. Taisnleņķa trijstūris. Trigonometriskās funkcijas. Pitagora teorēma

1. $\sin \angle A = \frac{BC}{AB}$; $\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$; $\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}$; $\operatorname{ctg} \angle A = \frac{AC}{BC}$; $\sin \angle B = \frac{b}{c}$;
 $\cos \angle B = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg} \angle B = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg} \angle B = \frac{a}{b}$. 2. a) 45° ; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 60° ; d) 1; e) 60° ; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; g) 30° ; h) 45° . 3. 1. $c = 13$; $\sin \angle A = \frac{5}{13}$; $\cos \angle B = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} \angle A = \frac{5}{12}$;

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \angle B &= \frac{5}{12}; 2. a = 7; c = 7\sqrt{2}; \sin \angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \angle B = \frac{\sqrt{2}}{2}; \operatorname{tg} \angle A = 1; \\ \operatorname{ctg} \angle B &= 1; \angle B = 45^\circ; 3. b = 12; \sin \angle A = \frac{3}{5}; \cos \angle B = \frac{3}{5}; \operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{4}; \\ \operatorname{ctg} \angle B &= \frac{3}{4}; 4. a = 6\sqrt{3}; c = 12; \sin \angle A = \frac{1}{2}; \cos \angle B = \frac{1}{2}; \operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{3}}{3}; \\ \operatorname{ctg} \angle B &= \frac{\sqrt{3}}{3}; \angle A = 30^\circ. \end{aligned}$$

4. Vienādsānu trijstūris; $4\sqrt{2}$ cm, $4\sqrt{2}$ cm un 8 cm. 5. 5 cm. 6. Sānu mala ir 28 cm; pamats ir $14 + 14\sqrt{3}$ cm. 7. a) 13 cm; b) 16 cm. 8. 10 cm. 9. a) Nav; b) ir; c) ir. 10. 20 cm un $20\sqrt{3}$ cm. 11. 41 km.

Pašpārbaude. 1. Hipotenūza. 2. 65° . 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. 20 m. 5. 9 cm. 6. $5\sqrt{3}$ dm. 7. 10 cm. 8. 6 cm. 9. Pamats ir $14\sqrt{3}$ cm; sānu mala ir 14 cm. 10. 7 cm.

23. Trijstūra laukums

1. $S = 24 \text{ cm}^2$. 2. a) $S = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$; b) $S = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 3. 48 cm. 4. 150 cm^2 . 5. $\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 6. a) $S = 36 \text{ cm}^2$; $h = 8 \text{ cm}$; b) $S = 22,5 \text{ cm}^2$; $h = 3\sqrt{5} \text{ cm}$; c) $S = 22,5 \text{ cm}^2$; $h = 9 \text{ cm}$; d) Novelkot augstumu, veidojas divi taisnleņķa trijstūri ADB un CDB. Trijstūra ACB sānu malas apzīmē ar x un $x + 7$. Izmanto Pitagora teorēmu. Izsaka augstumu $(x + 7)^2 - 225 = x^2 - 36$; sānu malas 10 cm un 17 cm, $S = 84 \text{ cm}^2$; $h = 16,8 \text{ cm}$. 7. $8\sqrt{5} \text{ cm}^2$. 8. 96 cm^2 , $4\sqrt{6} \text{ cm}$.

Pašpārbaude. 1. $S = 6 \text{ cm}^2$. 2. $S = 15 \text{ cm}^2$. 3. $S = 7\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 4. $S = 24 \text{ cm}^2$. 5. $S = 48 \text{ cm}^2$. 6. $h = 16 \text{ cm}$. 7. $S = 10\sqrt{2} \text{ cm}^2$. 8. $S = 96 \text{ cm}^2$; $a = 4\sqrt{6} \text{ cm}$. 9. Laukums samazināsies 2 reizes.

24. Četrstūra laukums

1. 4 cm, 16 cm^2 . 2. 80 cm^2 . 4. 72 cm^2 . 5. 3 cm, 45° . 7. 2 cm. 8. 20 cm^2 . 9. 50 cm^2 . 10. $S = 12,5 \sqrt{3} \text{ dm}^2$; $P = 20 \text{ cm}$. 11. 24 cm^2 . 12. 288 cm^2 . 13. $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$. 14. 3 iepakojumi. 15. 384 cm^2 . 17. 244 cm^2 .

Pašpārbaude. 1. 49 cm^2 . 2. 120 cm^2 . 3. $b = 20 : a$. 4. 36 cm^2 . 6. 108 cm^2 . 7. 52 cm^2 . 8. 48 cm^2 . 9. 387 cm^2 . 10. 20%.

25. Skaitļu virknes jēdziens. Aritmētiskā un ģeometriskā progresija

1. a) 27; 243; $x_{n+1} = x_n \cdot 3$; augoša; b) 1; -4; $x_{n+1} = x_n - 2$; dilstoša; c) -16; 32; $x_{n+1} = x_n \cdot (-2)$; svārstīga.
2. a) 1; 4; 7; 10; $c_{10} = 28$; ir; b) 1; 8; 27; 64; $c_{10} = 100$; nav; c) $-\frac{3}{5}$; $-1\frac{1}{5}$; $-1\frac{4}{5}$; $-2\frac{2}{5}$; $c_{10} = -6$; nav.
3. $d = 7$; $a_n = 7n - 6$; $a_{n+1} = a_n + 7$; $S_{10} = 325$. 4. 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; $a_{15} = 8,5$; $S_{15} = 75$.
5. a) $S_{30} = 1395$; b) $S_{10} = -25$; c) $S_{21} = -315$. 6. $a_{10} = 10$, $n = 90$, $a_{90} = 99$, $S_{90} = 4905$. 7. -5,2; -2,4; 0,4; 3,2; $d = 2,8$; $S_6 = -6$. 8. $d = 1$; $a_8 = 9$; 2; 3; 4; 5; $a_n = n + 1$.
9. a) $S_n = 0,3n$; b) Ls 3; c) 13 dienās; d) aritmētiskā progresija.
10. $a_1 = 10$; $d = 5$; $a_n = 60$; $n = 11$.
11. a) aritmētiskā progresija; $a_n = n - 0,7$; augoša; b) ģeometriskā progresija; $b_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; dilstoša; c) nav ne aritmētiskā progresija, ne ģeometriskā progresija; $x_n = \frac{10n}{3^n}$; dilstoša.
13. 1) $b_4 = 54$; $S_4 = 80$; 2) $n = 5$; $S_5 = -55555$; 3) $b_1 = 2$; $S_5 = 3,875$
- Pašpārbaude.** 1. Augoša. 2. Nē. 3. Jā. 4. 97. 5. Ir; $d = -5$. 6. $S_{17} = -340$. 7. Ir; $q = 5$. 8. 2; 7; 12; augoša. 9. $S_4 = 4,992$. 10. 200 eiro; jā.

26. Kombinatorika, statistika un varbūtība

1. 12 2. 120 3. 12 4. 60 5. 10 6. 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 21, 24, 25; 7. a) 20 b) 20 c) 20
8. $P = \frac{1}{3}$ 9. a) $P = \frac{2}{9}$ b) $P = \frac{4}{9}$ c) $P = \frac{7}{9}$ d) $P = 1$ e) $P = \frac{7}{9}$

Pašpārbaude. 1. 7. 2. 6. 3. 24. 4. 6. 5. 27. 6. 24. 7. 3. 8. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 0$.